2 - Modelos em Controlo por Computador

Objectivo*: Introduzir a classe de modelos digitais que*

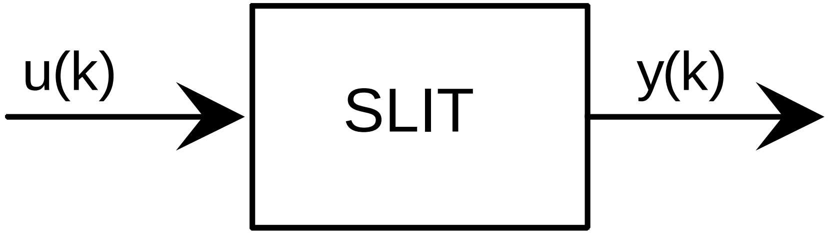
são empregues nesta disciplina para o projecto de controladores

Bibliografia: Astrom e Wittenmark, CCS, Cap. 3, em especial as secções 3.2, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7

Muito do material é já conhecido pelo que se fará apenas uma revisão rápida

SLITs em tempo discreto

SLITs - Sistemas Lineares e Invariantes no tempo (discreto)



Linearidade (vale o Princípio de Sobreposição):

$$u_1(k) \to y_1(k)$$
$$u_2(k) \to y_2(k)$$
$$au_1(k) + bu_2(k) \to ay_1(k) + by_2(k)$$

Invariância no tempo:

$$u(k) \to y(k)$$

$$u(k+k_0) \to y(k+k_0)$$

Descrição de SLITs por equações de diferenças

Equação de diferenças **linear** de **coeficientes constantes**:

Coeficientes da Equação

$$y(k+n)+\boxed{a_1}y(k+n-1)+\ldots+\boxed{a_n}y(k)=$$

$$=\boxed{b_0}u(k+m)+\boxed{b_1}u(k+m-1)+\ldots+\boxed{b_m}u(k)$$

Ordem da Equação

n Condições iniciais especificadas:

$$y(n-1)$$
$$\vdots$$
$$y(0)$$

Mostre que:

- A equação de diferenças linear, de coeficientes constantes descreve um sistema linear e invariante no tempo
- A solução da equação de diferenças com n condições iniciais especificadas existe e é única

Descrição de SLITs por equações de diferenças

Equação de diferenças escrita com as amostras avançadas:

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k)=$$
$$=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\ldots+b_m u(k)$$

Equação de diferenças escrita com as amostras atrasadas:

$$y(k)+a_1 y(k-1)+\ldots+a_n y(k-n)=$$
$$=b_0 u(k-(n-m))+b_1 u(k-(n-m)-1)+\ldots+b_m u(k-n)$$

Passa-se de uma para outra atrasando ou adiantando o tempo n passos.

Causalidade do sistema

Um sistema diz-se **causal** se *y(k)* depende apenas das entradas e saídas até ao instante *k*.

Sistema descrito por equação de diferenças linear:

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k)=$$

$$=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\ldots+b_m u(k)$$

Este sistema é **causal** se

$$\boxed{n>m}$$

Atraso do Sistema

Equação de diferenças escrita com as amostras atrasadas:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) =$$

$$= b_0 u(k-\underbrace{(n-m)}_{\text{Atraso do sistema}}) + b_1 u(k-(n-m)-1) + \ldots + b_m u(k-n)$$

Uma entrada aplicada no instante *k* apenas influencia a saída a partir do instante *k+(n-m)*

De aqui em diante, consideram-se sempre sistemas causais.

Para estes o atraso do sistema, *d*, é positivo:

$$d = n - m > 0$$

Em muitos casos, sem perda de generalidade (porquê?) admite-se

$$d = 1$$

Um pequeno desvio: Transformada Z

Considere-se a sucessão:

$$f(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Esta sucessão é mapeada pela Transformada Z na função de variável complexa:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Exemplo

Determine a transformada Z da sucessão

$$f(k) = 1 \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

***Ajuda (definição da Transformada** Z):*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Ajuda (Soma da série geométrica):

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} \qquad \text{para } |r| < 1$$

Solução

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Exemplo

Determine a transformada Z da sucessão

$$f(k) = e^{ahk} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ajuda (definição da Transformada Z *):*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Ajuda (Soma da série geométrica):

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} \quad \text{para } |r| < 1$$

Solução

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{ahk} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{ah} z^{-1}\right)^{k} = \frac{1}{1-e^{ah} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{ah}}$$

Tabela de transformadas Z e de Laplace

(Tomar $t = kh$)

f	$\mathcal{L}f$	$\mathcal{Z}f$
$\delta(k)$ (pulse)	–	1
$1 \quad k \geq 0$ (step)	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
kh	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}(kh)^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-kh/T}$	$\frac{T}{1+sT}$	$\frac{z}{z-e^{-h/T}}$
$1-e^{-kh/T}$	$\frac{1}{s(1+sT)}$	$\frac{z(1-e^{-h/T})}{(z-1)(z-e^{-h/T})}$
$\sin \omega kh$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega h}{z^2 - 2z\cos \omega h + 1}$

Propriedades da Transformada Z

1.Linearidade

$$Z\left[\alpha f(k)+\beta g(k)\right]=\alpha F(z)+\beta G(z)$$

2.Deslocamento no tempo

$$Z\left[q^{-n} f(k)\right]=z^{-n}F(z)$$

$$Z\left[q^{n} f(k)\right]=z^{n}\left(F(z)-\sum_{j=0}^{n-1} f(j)z^{-j}\right)$$

Ex.: $n=1:\ Z\left[qf(k)\right]=z\left(F(z)-f(0)\right)$

$n=2:\ Z\left[q^2 f(k)\right]=z\left(F(z)-f(0)-f(1)z^{-1}\right)$

3.Teorema do valor final

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to\infty}(1-z^{-1})F(z)$$

4.Convolução

A convolução entre duas sucessões $f(k)$ e $g(k)$ é definida por

$$f * g(k) = \sum_{j=0}^{k} f(j)g(k-j)$$

Tem-se:

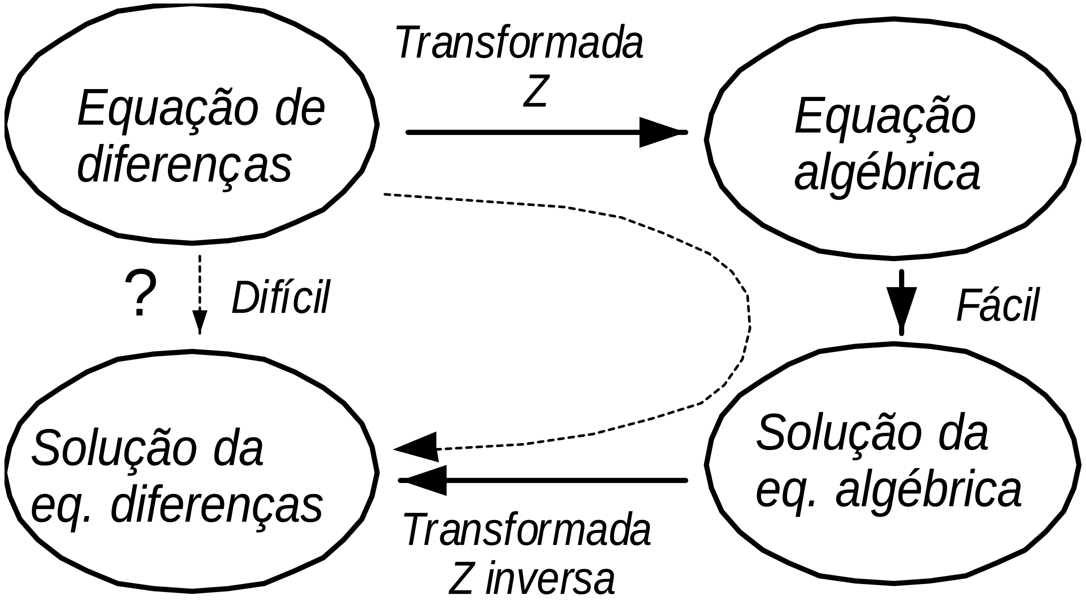
$$Z\left(f * g\right) = F(z).G(z)$$

Resolução de equações de diferenças

Pretende-se resolver a equação de diferenças

$$y(k+1) = ay(k) + bu(k) \quad \text{com} \quad y(0) = 0$$

Segue-se a seguinte abordagem



$$y(k+1) = ay(k) + bu(k)$$

Tomando a transformada Z

$$zY(z) - zy(0) = aY(z) + bU(z)$$

$$Y(z) = \frac{b}{z-a}U(z) + \frac{z}{z-a}y(0)$$

Com $y(0) = 0$

$$Y(z) = \frac{b}{z-a}U(z)$$

Resposta ao escalão:

$$u(k) = 1, \quad k \geq 0 \qquad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

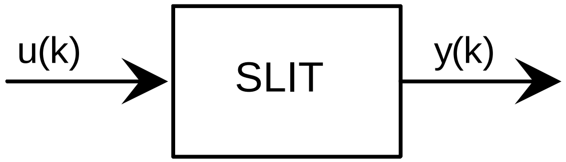
$$Y(z) = \frac{b}{z-a} U(z) = \frac{bz}{(z-a)(z-1)}$$

Decompondo em fracções simples:

$$Y(z) = \frac{\frac{-ba}{1-a}}{z-a} + \frac{\frac{b}{1-a}}{z-1} = \frac{b}{1-a} \frac{1}{z} \left(\frac{-az}{z-a} + \frac{z}{z-1} \right)$$

$$y(k) = b\left(1 - ae^{-(k-1)a}\right)$$

Função de transferência discreta



Assume-se o sistema modelado pela equação de diferenças

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k) = b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+b_m u(k)$$

Tome-se transformada Z com condições iniciais nulas para obter a função de transferência:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n}$$

Operador avanço

É possível uma descrição compacta e facilmente manipulável de SLIts discretos usando o operador avanço

Sucessão avançada

Sucessão

$$x(k+1) = qx(k)$$

Operador avanço

Operador de transferência do sistema (avanço)

Equação de diferenças:

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\ldots+a_n y(k)=$$

$$=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\ldots+b_m u(k)$$

Substituindo $y(k+n)$ por $q^n y(k)$, e assim sucessivamente:

$$q^n y(k)+a_1 q^{n-1} y(k)+\ldots+a_n y(k)=b_0 u(k+m)+b_1 u(k+m-1)+\ldots+b_m u(k)$$

Ponto *y(k)* e *u(k)* em evidência, obtem-se o seguinte operador que descreve o sistema:

$$y(k)=\frac{b_0 q^m+b_1 q^{m-1}+\ldots+b_{m-1} q+b_m}{q^n+a_1 q^{n-1}+\ldots+a_{n-1} q+a_n} u(k)$$

$$y(k) = \boxed{\frac{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \ldots + b_{m-1} q + b_m}{q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q + a_n}} u(k)$$

Operador de transferência
do sistema (avanço)

B(q)

$$H(q) = \frac{\boxed{b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \ldots + b_{m-1} q + b_m}}{\boxed{q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q + a_n}} = \frac{B(q)}{A(q)}$$

A(q)

Devido ao facto de o operador avanço transformar sequências limitadas (majoradas e minoradas) em sequências limitadas, pode ser manipulado algebricamente com grande liberdade.

Operador atraso

Analogamente, se pode usar o operador atraso:

Sucessão atrasada Sucessão

$$x(k-1) = q^{-1}x(k)$$

Operador atraso

Operador de transferência do sistema (atraso)

Equação de diferenças:

$$y(k)+a_1y(k-1)+\ldots+a_ny(k-n)=$$

$$=b_0u(k-(n-m))+b_1u(k-(n-m)-1)+\ldots+b_mu(k-n)$$

Substituindo $y(k-n)$ por $q^{-n}y(k)$, e assim sucessivamente:

$$y(k)+a_1q^{-1}y(k)+\ldots+a_nq^{-n}\;y(k)=$$
$$=b_0u(k-(n-m))+b_1u(k-(n-m)-1)+\ldots+b_mu(k-n)$$

Pondo *y(k)* e *u(k)* em evidência, obtem-se o operador que descreve o sistema:

$$y(k)=q^{-d}\,\frac{b_0+b_1q^{-1}+\ldots+b_mq^{-m}}{1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+\ldots+a_nq^{-n}}u(k)$$

Polinómio recíproco

Define-se o polinómio recíproco do polinómio $A(q)$ como

$$A^*(q^{-1}) = q^{-n} A(q)$$

Atenção: Em geral, o recíproco do recíproco não é a identidade!

Operador de transferência do sistema em termos do operador atraso e do polinómio recíproco

$$H^*(q^{-1}) = q^{-d} \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}} = q^{-d} \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

- A representação no operador avanço é mais adequada para o estudo da estabilidade;
- A representação no operador atraso é mais adequada para a implementação dos algoritmos;

Exercício

Considere os sistemas lineares e invariantes descritos pelas equações de diferenças

$$y(k+1) - 0.5y(k) = u(k)$$

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 4u(k)$$

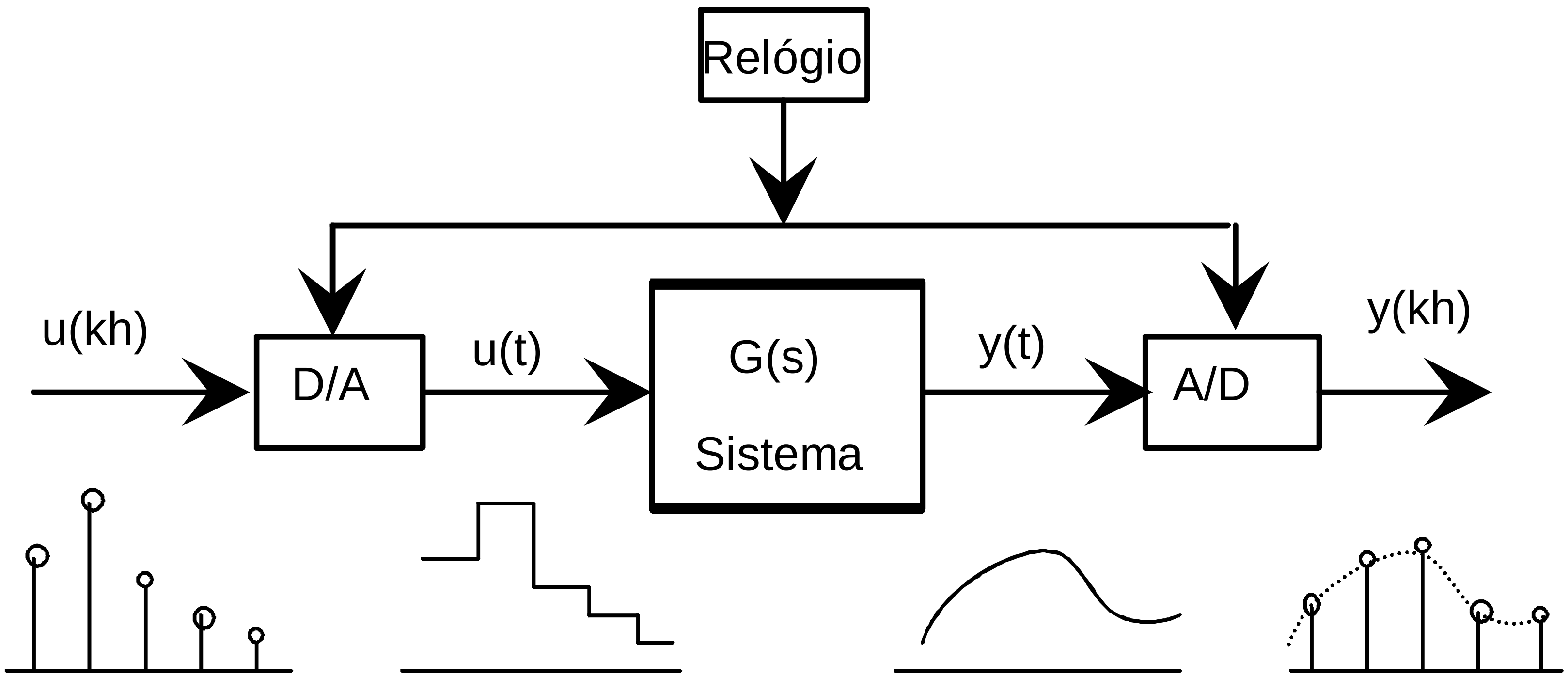
Para cada uma delas:

a) Escreva a equação na forma em que a variável mais avançada é $y(k)$.

b) Determine a função de transferência, em potências de z e de z^{-1}.

c) Diga qual o atraso puro do sistema.

Modelo de um sistema amostrado



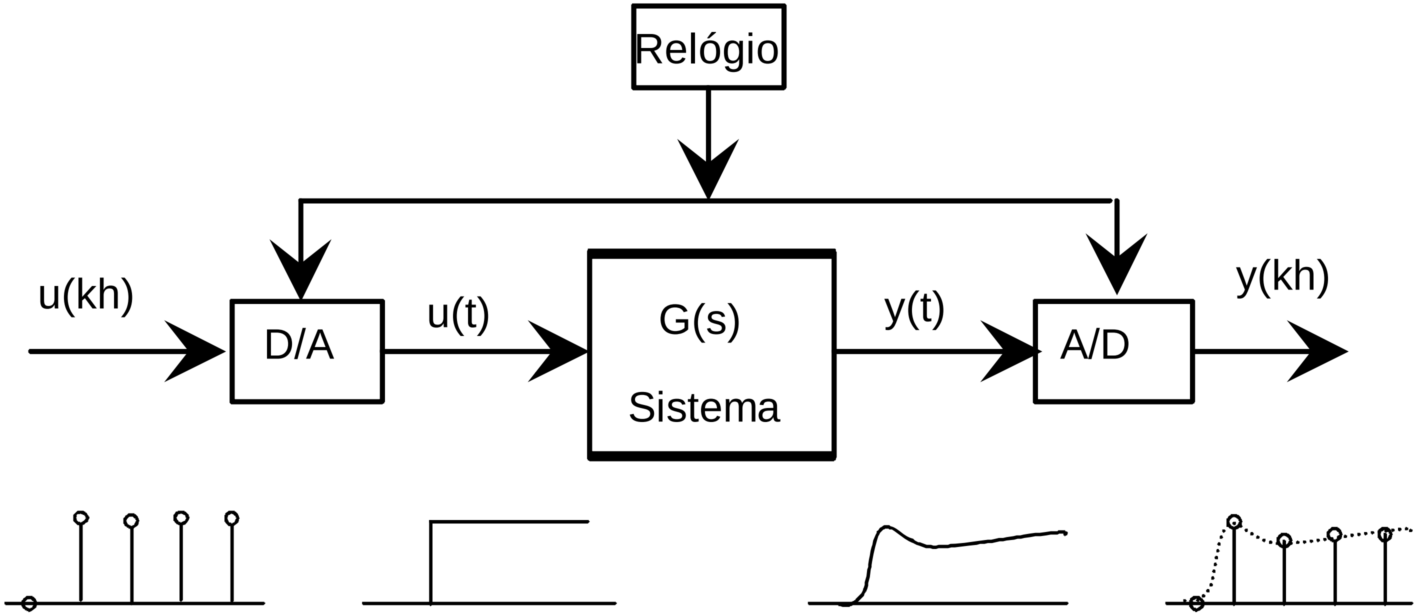
Qual a função de transferência discreta “vista” pelo computador?

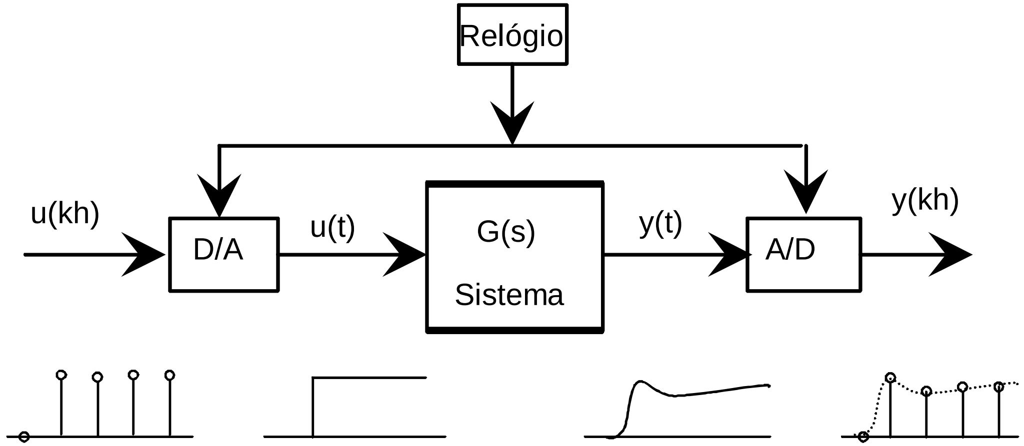
Recorde-se que, para determinar a função de transferência, devemos:

- Aplicar um sinal à entrada do sistema, com condições iniciais nulas
- Observar a saída
- Determinar as transformadas Z da entrada e da saída correspondente
- Calcular a função de transferência como o quociente entre a transformada Z da saída e a transformada Z da entrada

Que sinal de teste é mais conveniente aplicar?

Se aplicarmos um escalão discreto à entrada, à entrada do sistema contínuo aparecerá também um escalão, o que facilita as contas





$$y(t) = TL^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] \quad y(kh) = TL^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]\Big|_{t=kh}$$

A função de transferência discreta equivalente é

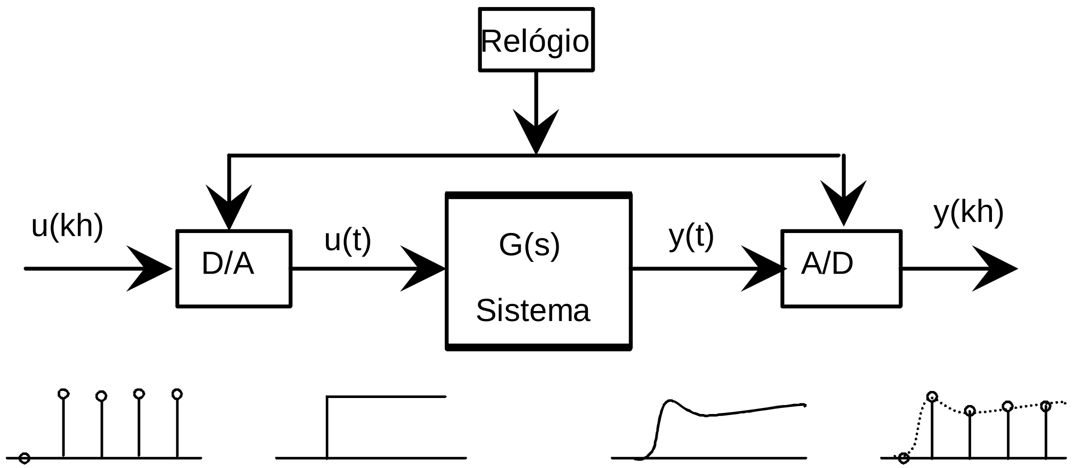
$$G_d(z) = \frac{Z\left[y(kh)\right]}{Z\left[u(kh)\right]}$$

Sendo *u(kh)* um escalão discreto, a sua transformada Z é:

$$Z[u(kh)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{G_d(z) = (1-z^{-1})Z\left\{TL^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]_{t=kh}\right\}}$$

Modelo de um SLIT amostrado com um ZOH (Conclusão)



Do ponto de vista do computador, *I. e.* entre a entrada e a saída discreta, este sistema é equivalente a um SLIT discreto com função de transferência

$$\boxed{G_d(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{ TL^{-1}\left[\frac{1}{s}G(s)\right]_{t=kh} \right\}}$$

Modelo de sistema amostrado - Exemplo

Qual a função de transferência discreta (causal) que se obtém quando se amostra o sistema contínuo com função de transferência

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad ?$$

Solução:

$$G_d(z) = (1 - z^{-1}) Z\left[TL^{-1}\left[\frac{a}{s(s+a)} \right] \Big|_{t=kh} \right]$$

Decompondo em fracções simples

$$\frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{1}{s} \rightarrow f(t) = 1 \quad t \geq 0$$

$$f(kh) = 1 \quad k \geq 0$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\frac{1}{s+a} \rightarrow f(t) = e^{-at} \quad t \geq 0$$

$$f(kh) = e^{-ahk} \quad k \geq 0$$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-ah} z^{-1}}$$

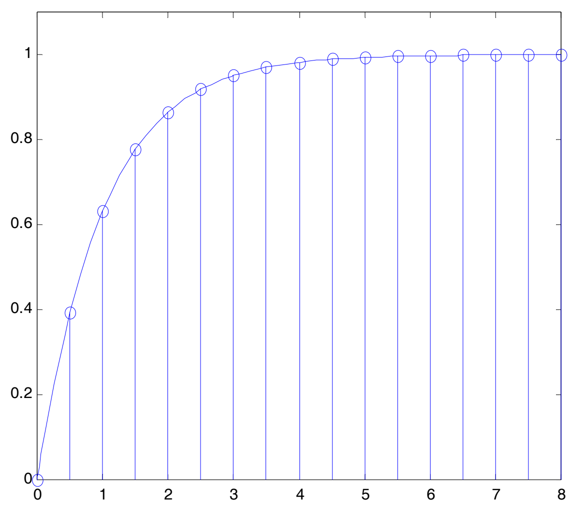
$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-ah} z^{-1}}\right)$$

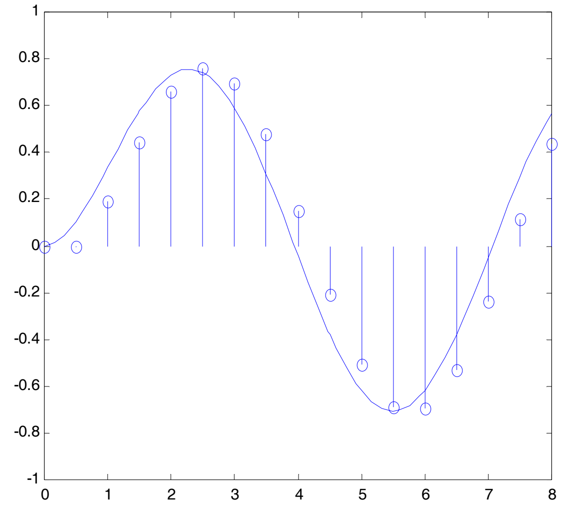
$$\boxed{G_d(z) = \frac{(1 - e^{-ah}) z^{-1}}{1 - e^{-ah} z^{-1}}}$$

A região de convergência deve ser escolhida por forma a que o sistema seja causal.

A resposta ao **escalão** do sistema contínuo coincide, nos instantes de amostragem, com a resposta do sistema discretizado.

Isto **não** acontece para outro tipo de entradas, por exemplo uma sinusóide.





Este facto motiva que se designe este método de discretização por *método do escalão invariante.*

TABLE 3.1 Zero-order hold sampling of a continuous-time system, $G(s)$.

The table gives the zero-order-hold equivalent of the continuous time system, $G(s)$, preceded by a zero-order hold. The sampled system is described by its pulse-transfer operator. The pulse-transfer operator is given in terms of the coefficients of

$$H(q) = \frac{b_1 q^{n-1} + b_2 q^{n-2} + \cdots + b_n}{q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n}$$

$G(s)$	$H(q)$ or the coefficients in $H(q)$	
$\frac{1}{s}$	$\frac{h}{q-1}$	
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{h^2(q+1)}{2(q-1)^2}$	
$\frac{1}{s^m}$	$\frac{q-1}{q} \lim_{a\to 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left(\frac{q}{q-e^{-ah}} \right)$	
e^{-sh}	q^{-1}	
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1-\exp(-ah)}{q-\exp(-ah)}$	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(ah - 1 + e^{-ah})$	$b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-ah} - ahe^{-ah})$
	$a_1 = -(1 + e^{-ah})$	$a_2 = e^{-ah}$
$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-ah}(1 + ah)$	$b_2 = e^{-ah}(e^{-ah} + ah - 1)$
	$a_1 = -2e^{-ah}$	$a_2 = e^{-2ah}$

$$\frac{s}{(s+a)^2} \qquad \frac{(q-1)he^{-ah}}{(q-e^{-ah})^2}$$

$$\frac{ab}{(s+a)(s+b)} \qquad b_1 = \frac{b(1-e^{-ah}) - a(1-e^{-bh})}{b-a}$$

$$a \neq b \qquad b_2 = \frac{a(1-e^{-bh})e^{-ah} - b(1-e^{-ah})e^{-bh}}{b-a}$$

$$a_1 = -(e^{-ah} + e^{-bh})$$

$$a_2 = e^{-(a+b)h}$$

$$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)} \qquad b_1 = \frac{e^{-bh} - e^{-ah} + (1-e^{-bh})c/b - (1-e^{-ah})c/a}{a-b}$$

$$a \neq b \qquad b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)h} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-ah} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bh}$$

$$a_1 = -e^{-ah} - e^{-bh} \qquad a_2 = e^{-(a+b)h}$$

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad b_1 = 1 - \alpha\left(\beta + \frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma\right) \qquad \omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \zeta < 1$$

$$b_2 = \alpha^2 + \alpha\left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma - \beta\right) \qquad \alpha = e^{-\zeta\omega_0 h}$$

Transformação dos pólos

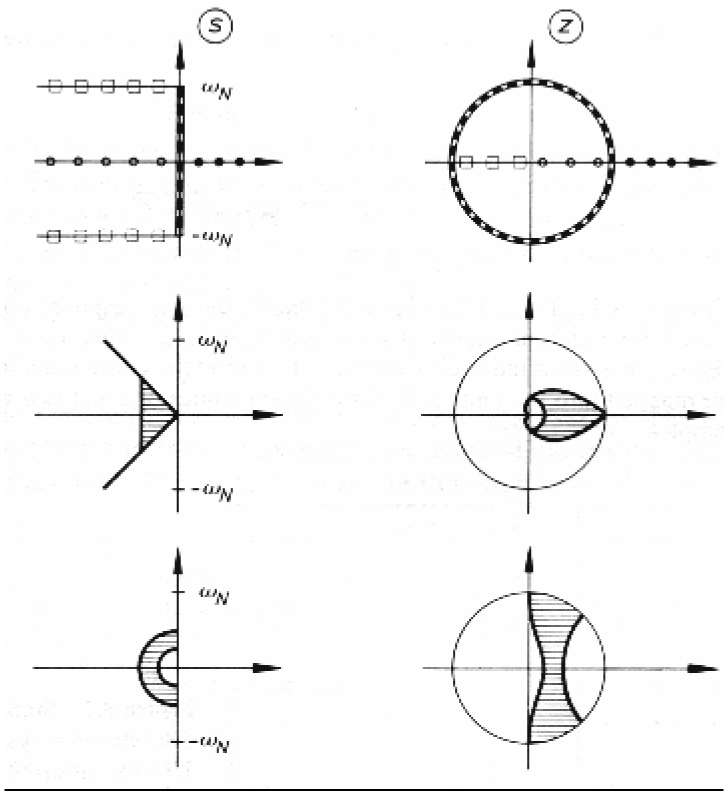
Na discretização com retentor de amostras de ordem zero os pólos são transformados de acordo com uma transformação exponencial.

Um pólo em s_i no contínuo é transformado num pólo z_i dado por

$$z_i = e^{s_i h}$$

h = intervalo de amostragem

Exemplo de transformação de pólos



Sistema de 2ª ordem com pólos complexos conjugados

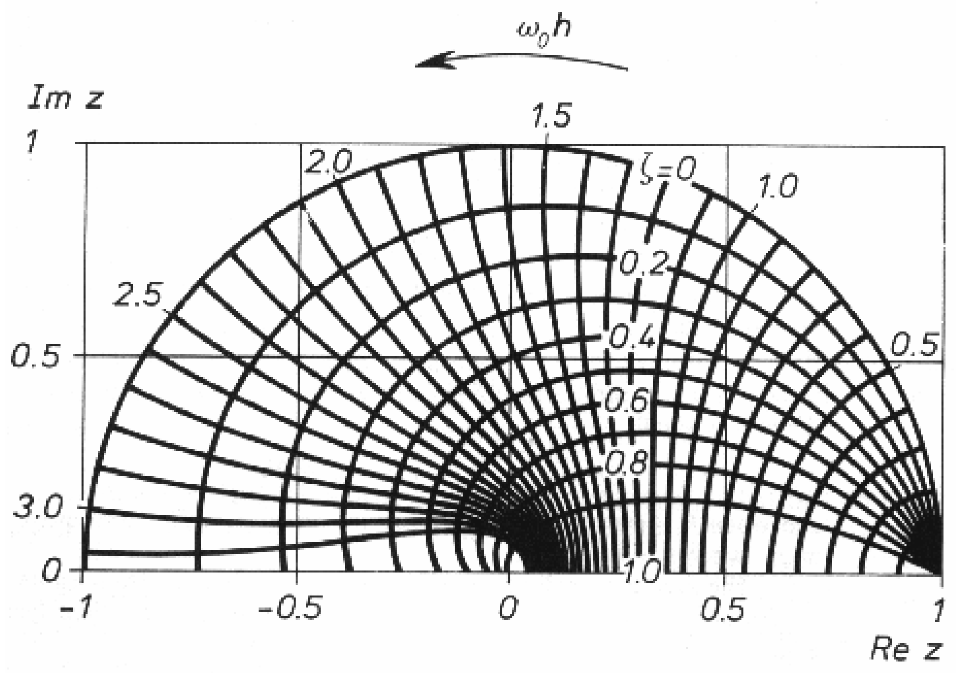
$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Os pólos são transformados nas raízes do polinómio

$$z^2 + a_1 z + a_2$$

$$a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 h}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 h\right)$$

$$a_2 = e^{-2\zeta\omega_0 h}$$



Transformação dos zeros

A transformação dos zeros é muito mais complexa e não existe uma regra geral simples como a transformação exponencial dos pólos.

Deve no entanto ser notado que um sistema contínuo de fase mínima pode dar origem, por amostragem com ritmo elevado, a um sistema de fase não mínima (*i. e.* em que há zeros fora do círculo unitário).

Este facto pode dar origem a problemas no controlo e sugere que nem sempre é bom aumentar o ritmo de amostragem (ao contrário do que sugere a nossa intuição e do que sucede em problemas de Processamento de Sinal).

Ver exemplos AW pp. 73-75