

## 7.0 Problema Linear Quadrático

Objectivo:

*Introduzir o Problema Linear Quadrático e os elementos básicos da sua solução. Mostrar que o controlo resultante estabiliza a cadeia fechada.*

## Formulação do Problema Linear Quadrático

Dinâmica:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$x(0) = x_0 \quad u(t) \in R^m$$

Funcional de custo:

$T$  fixo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'Ru] dt \quad Q = Q' \geq 0 \quad R = R' > 0$$

Pretende-se **minimizar** o funcional  $J$  pelo que a Lagrangiana deve ser

$$L(x, u) = -\frac{1}{2} (x'Qx + u'Ru)$$

### Equação adjunta

$$-\dot{\lambda}' = \lambda' f_x + L_x$$

$$-\dot{\lambda}'(t) = \lambda'(t)A - x'(t)Q \quad \text{sujeita à condição terminal} \quad \lambda(T) = 0$$

### Hamiltoniana

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x, u) + L(x, u)$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda'(t)Ax(t) + \lambda'(t)bu(t) - \frac{1}{2}x'(t)Qx(t) - \frac{1}{2}u'(t)Ru(t)$$

## Condição (necessária) de mínimo da Hamiltoniana

A Hamiltoniana

$$H(\lambda, x, u) = \lambda'(t)Ax(t) + \lambda'(t)bu(t) - \frac{1}{2}x'(t)Qx(t) - \frac{1}{2}u'(t)Ru(t)$$

é uma função quadrática. Uma condição necessária de mínimo é pois

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

ou seja

$$\lambda'(t)b - u'(t)R = 0$$

pelo que o controlo óptimo verifica

$$u(t) = R^{-1}b'\lambda(t)$$

A trajectória óptima do estado verifica pois

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bR^{-1}b'\lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = Qx(t) - A'\lambda(t)$$

$u_{opt}(t)$

sujeito às condições

$$x(0) = x_0 \quad \lambda(T) = 0$$

Trata-se de um problema em que as incógnitas ( $x$  e  $\lambda$ ) estão especificadas em dois pontos ( $0$  e  $T$ ). Diz-se um problema de valores na fronteira em dois pontos (*Two point boundary value problem*). **Como resolvê-lo?**

As equações do estado e do co-estado, com o controlo ótimo, são:

$$\dot{x} = Ax + bR^{-1}b'\lambda$$

$$\dot{\lambda} = Qx - A'\lambda$$

Admita-se que existe uma matriz  $P(t)$ , tal que

$$\lambda = -Px$$

Sendo assim, as equações do estado e do co-estado escrevem-se:

$$\dot{x} = [A - bR^{-1}b'P]x$$

$$\dot{\lambda} = [Q + A'P]x$$

Repare-se que, se conhecermos a matriz  $P(t)$ , a equação de estado fica desacoplada da do co-estado, podendo ser resolvida separadamente.

Vamos então tentar obter uma equação verificada pela matriz  $P(t)$ . Tem-se

$$\dot{\lambda} = -Px$$

Derivando

$$\dot{\lambda} = -\dot{P}x - P\dot{x}$$

Usando as equações diferenciais do estado e do co-estado:

$$(Q + A'P)x = -\dot{P}x - P(A - bR^{-1}b'P)x$$

ou seja, pondo  $x$  em evidência:

$$\left[ \dot{P} + PA + A'P - PbR^{-1}b'P + Q \right] x = 0$$

$$\left[ \dot{P} + PA + A'P - PbR^{-1}b'P + Q \right] x = 0$$

Para que esta identidade seja satisfeita para todo o  $x$ , o termo entre parêntesis recto tem de ser nulo.

Obtém-se assim a **equação diferencial de Riccati**:

$$-\dot{P} = PA + A'P - PbR^{-1}b'P + Q$$

$$P(T) = 0 \quad (\text{porquê?})$$



## Problema Linear Quadrático (LQ) - Resumo

Dado sistema com dinâmica linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad u(t) \in R^m$$

O controlo que **minimiza** o custo quadrático de horizonte finito

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t)Qx(t) + u'Ru] dt \quad Q = Q' \geq 0 \quad R = R' > 0$$

é dado pela retroacção do estado de ganho variável no tempo:

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad K(t) = R^{-1}B'P(t)$$

em que  $P(t)$  é a matriz simétrica definida positiva que satisfaz a equação diferencial de Riccati

$$-\dot{P} = PA + A'P - PbR^{-1}b'P + Q \quad P(T) = 0$$

### Exemplo (Controlo LQ de um Sistema de 1ª ordem)

Considere-se o sistema de primeira ordem, *instável* em cadeia aberta

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad x(0) = 1$$

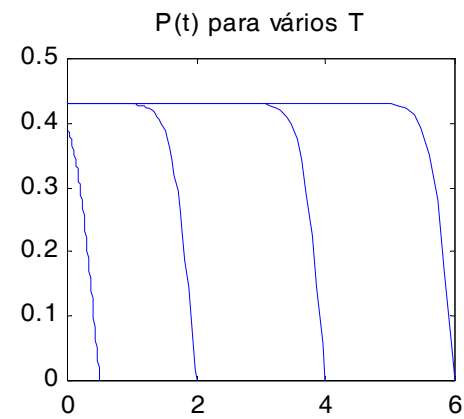
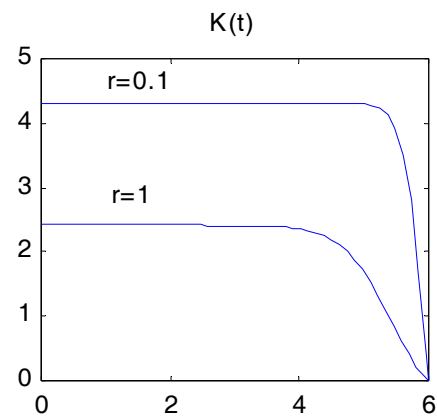
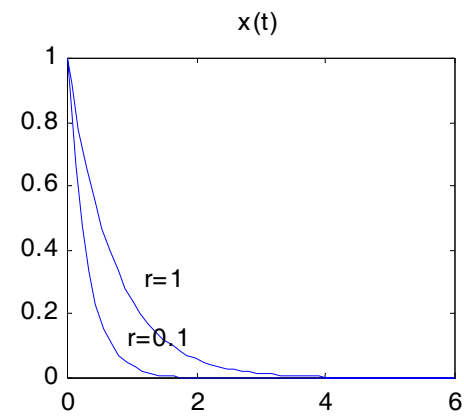
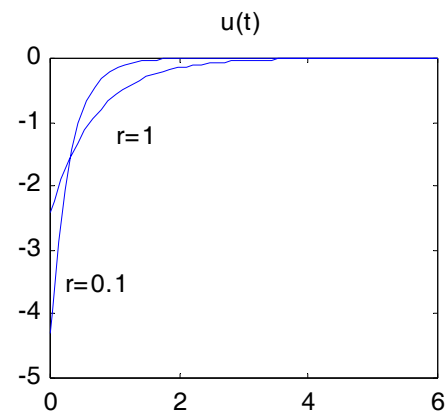
Pretende-se determinar a lei de controlo que minimiza

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^2(t) + ru^2(t)] dt \quad T > 0, \quad r > 0$$

A solução é dada por

$$\dot{p}(t) = -2p(t) + \frac{1}{r} p^2(t) - 1 \quad p(T) = 0$$

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad K(t) = \frac{1}{r} p(t)$$



Como se pode observar, diminuindo o peso no custo da acção de controlo,  $r$ , o sistema fica mais rápido (o transitório do estado extingue-se mais rapidamente), o mas o ganho aumenta (compare-se com a situação que se tem no Controlo de Variância Mínima dessintonizado).

Aumentando o horizonte, a solução da equação de Riccati é inicialmente uma constante bem definida, tendo um transitório próximo do intervalo de optimização.

Isto sugere que, quando o horizonte  $T \rightarrow \infty$  a solução da equação de Riccati fica constante para todo o  $t$ .

O exemplo anterior sugere que se considere o problema de minimizar o custo quadrático sobre um horizonte infinito

$$J_{LQ\infty} = \int_0^{\infty} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt$$

A solução deste problema vem dada pelo controlo por retroacção do estado

$$u(t) = -Kx(t) \quad K = R^{-1}B'P$$

em que  $P$  é a solução da **equação algébrica de Riccati**, dada por

$$PA + A'P - PbR^{-1}b'P + Q = 0$$

Se o sistema

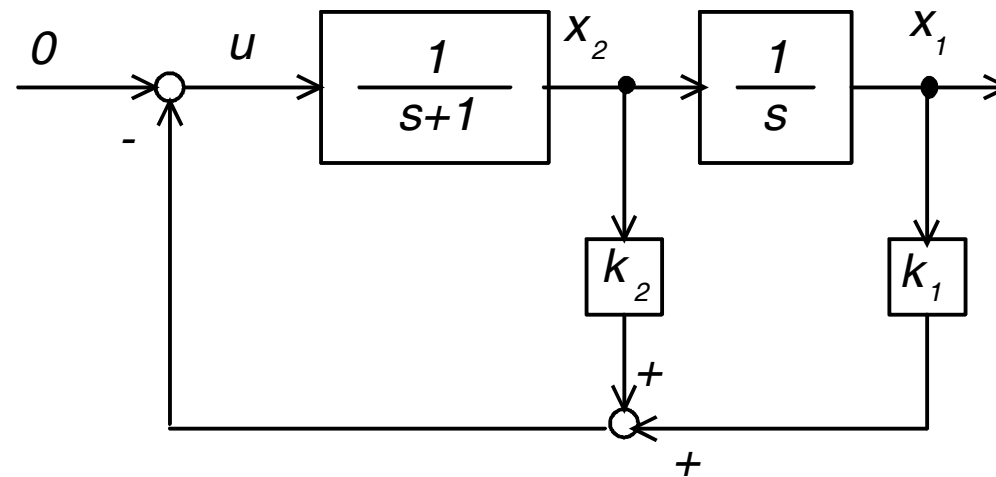
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

for estabilizável, i. e., se existir um vector de ganhos  $F$  tal que o sistema em cadeia fechada

$$\dot{x}(t) = (A - bF)x(t)$$

é estável, então a solução da equação de Riccati algébrica é semidefinida positiva (pelo menos) e corresponde ao limite da solução da equação diferencial de Riccati quando o horizonte  $T$  é sucessivamente aumentado.

**Problema:** Dado o sistema definido pelo diagrama de blocos



Determinar os valores de  $k_1$  e  $k_2$  que optimizam

$$J = \int_0^{\infty} [x' Q x(t) + u' R u(t)] dt \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

Modelo de estado do sistema em cadeia aberta

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) \quad \text{donde} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1} U(s) \quad \text{ou} \quad sX_2(s) = -X_2(s) + U(s) \quad \text{donde} \quad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

O modelo de estado é portanto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



A equação Algébrica de Riccati:

$$PA + A'P - PBR^{-1}C'P + Q = 0$$

neste caso é

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11} - p_{12} \\ 0 & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11} - p_{12} \\ 0 & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualando as entradas correspondentes destas matrizes, obtêm-se as equações seguintes:

$$p_{12}^2 = 1$$

$$p_{11} - p_{12} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$2(p_{12} - p_{22}) - p_{22}^2 + 0.1 = 0$$

A equação  $p_{12}^2 = 1$  é verificada por  $p_{12} = \pm 1$ . No entanto, apenas a raiz positiva leva a uma matriz  $P$  definida positiva. Assim, é  $p_{12} = 1$ .

$$p_{11} - p_{12} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$2(p_{12} - p_{22}) - p_{22}^2 + 0.1 = 0$$

Sendo  $p_{12} = 1$ , estas equações reduzem-se a

$$p_{11} - p_{22} = 1$$

$$p_{22}^2 + 2p_{22} - 1.9 = 0$$

A segunda equação tem como raízes  $-1 \pm \sqrt{2.9}$ . Uma vez mais deve ser tomada a raiz positiva para que a matriz  $P$  seja definida positiva. Assim:

$$P = \begin{bmatrix} 1.7 & 1 \\ 1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.7 & 1 \\ 1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

O vector de ganhos óptimo vem dado por

$$K = R^{-1} B' P$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 & 1 \\ 1 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

A lei de controlo óptimo LQ é pois:

$$u(t) = -(x_1 + 0.76x_2)$$

## Regulação Quadrática da Saída com horizonte infinito

Há situações em que se pretende **regular a saída** do sistema. Modelo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

com o funcional de custo:

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

Repare-se que, como

$$y^2(t) = x'(t)C' Cx(t)$$

este problema reduz-se ao anterior fazendo a seguinte escolha da matriz  $Q$ :

$$Q = C' C$$

A solução do problema de minimizar

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

em que o sistema é modelado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad y(t) = Cx(t)$$

é dada por

$$u(t) = -Kx(t) \qquad K = R^{-1}B'P$$

em que  $P$  é a única solução definida positiva da seguinte **equação algébrica de Riccati**

$$PA + A'P - \frac{1}{\rho} Pbb'P + C'C = 0$$

Relativamente a esta lei de controlo tem-se o seguinte teorema:

*Se o par  $(A, B)$  for estabilizável (ver definição acima) e o par  $(A, C)$  for observável, a solução definida positiva da equação algébrica de Riccati existe e é única, e o sistema em cadeia fechada é assintoticamente estável.*

O par  $(A, C)$  é observável se

$$\text{car} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad n = \dim(x)$$

Uma matriz  $P$  diz-se definida positiva se

$$x' P x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Diz-se semidefinida positiva se

$$x' P x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$$



**Questão:** Qual a colocação dos pólos da cadeia fechada que corresponde a minimizar  $J_\infty$  (no caso em que o sistema é SISO)?

**Resposta** [Chang/Letov]: Os pólos do sistema realimentado óptimo (com  $T = \infty$ ) são as  $n$  raízes estáveis do polinómio  $\Delta(s)$  de grau  $2n$  dado por

$$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s)$$

em que

$$b(s) = C \operatorname{adj}(sI - A)B$$

Zeros do sistema

$$a(s) = \det(sI - A)$$

Pólos do sistema

$$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s)$$

Se  $s = s_1$  é uma raiz de  $\Delta(s)$ , então:

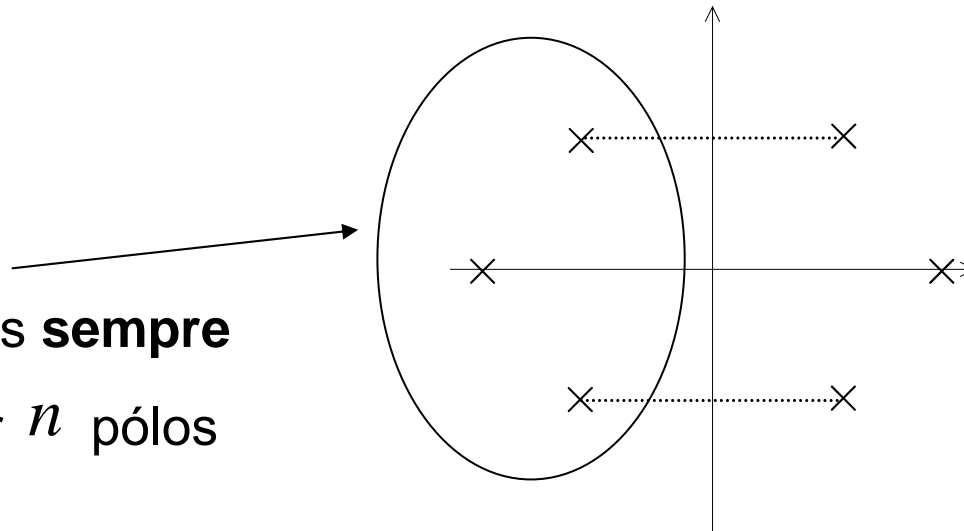
$$\Delta(s_1) = a(s_1)a(-s_1) + \frac{1}{\rho}b(s_1)b(-s_1) = 0$$

Neste caso, também se tem para  $s = -s_1$ :

$$\Delta(-s_1) = a(-s_1)a(s_1) + \frac{1}{\rho}b(-s_1)b(s_1) = 0$$

ou seja, se  $s = s_1$  é uma raiz de  $\Delta(s)$ , então  $s = -s_1$  também o é.

As raízes de  $\Delta(s)$  são simétricas relativamente ao eixo imaginário.



Podemos **sempre**  
escolher  $n$  pólos  
estáveis

Como os pólos do sistema controlado são dados pelas raízes estáveis de  $\Delta(s)$ , o sistema em cadeia fechada com controlo ótimo LQ de horizonte infinito é estável.

## Solução do Problema LQ ( $T = \infty$ ) por colocação de pólos

A solução do problema LQ de horizonte infinito pode ser feita do seguinte modo:

### 1. Determinar

$$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s)$$

2. Determinar  $n = \partial a(s)$  raízes estáveis de  $\Delta(s)$ .

3. Calcular o vector de ganhos de retroacção do estado tal que o sistema em cadeia fechada tem os pólos na posição dessas raízes.

## Exemplo

Dado o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0]x$$

Qual a lei de controlo por retroacção do estado que minimiza

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt \quad \rho = 10$$

Em primeiro lugar é necessário obter a função de transferência em cadeia aberta. Em geral, isso pode ser feito com as expressões

$$b(s) = C \operatorname{adj}(sI - A)B \quad a(s) = \det(sI - A)$$

Neste caso, é fácil obter a função de transferência recorrendo à manipulação de diagramas de blocos. As equações de estado são representadas graficamente através de um diagrama de blocos, que é simplificado até se obter a função de transferência.

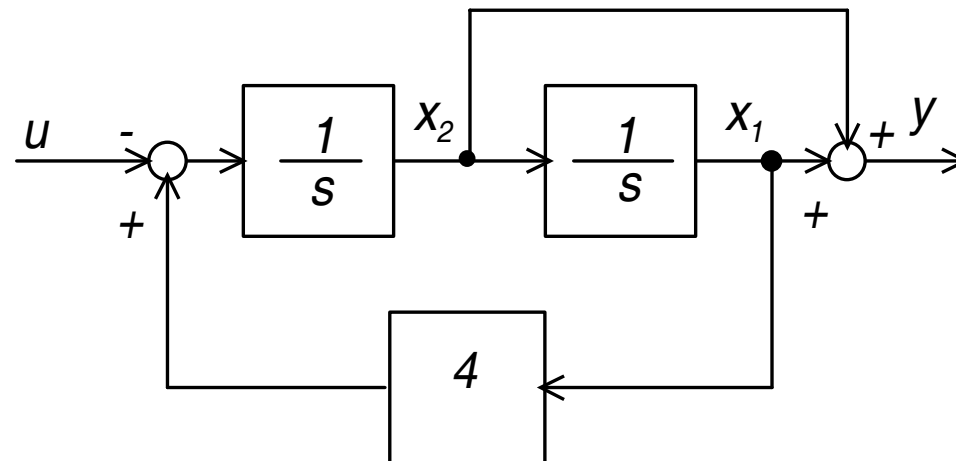
Os alunos são convidados a resolver o mesmo problema recorrendo às expressões acima.

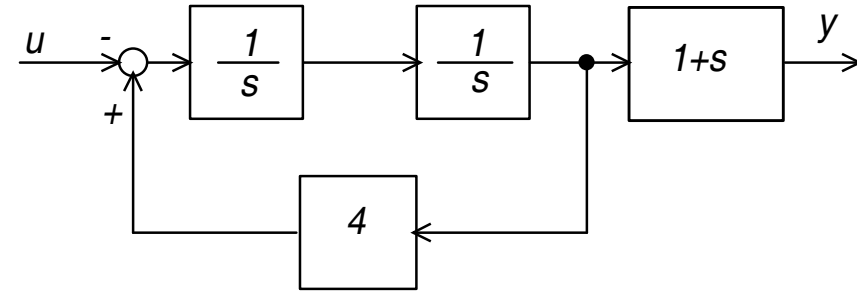
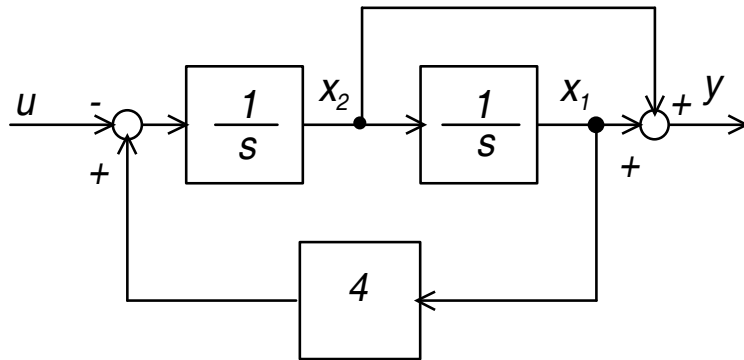
Equações de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 - u$$

Diagrama de blocos equivalente:





$$Y = \frac{-\frac{1}{s^2}}{1 - \frac{4}{s^2}} (1 + s)U$$

$$Y = -\frac{1 + s}{s^2 - 4} U$$

$$b(s) = -(1 + s)$$

$$a(s) = s^2 - 4$$



Os pólos ótimos são as duas raízes estáveis de

$$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s)$$

$$a(s) = s^2 - 4 \quad b(s) = -(1 + s)$$

$$\Delta(s) = (s^2 - 4)^2 + \frac{1}{\rho}(1 + s)(1 - s) \leftarrow = 1 - s^2$$

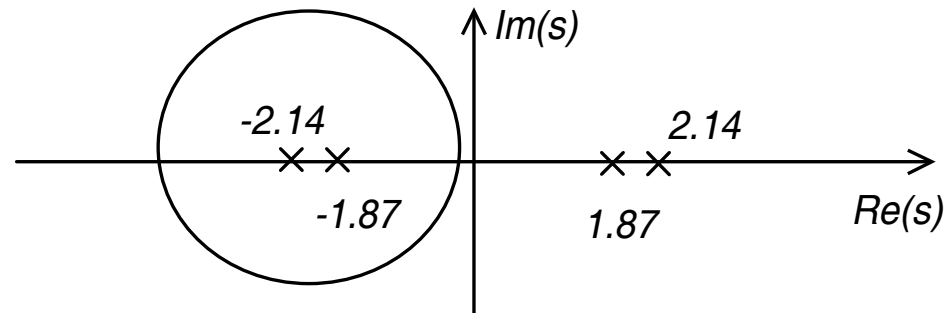
Mudança de  
variável

$$\rightarrow z = s^2$$

$$(z - 4)^2 + \frac{1}{\rho}(1 - z) = 0$$

$$z^2 - 8.1z + 16.1 = 0 \quad z_1 = 4.6 \quad z_2 = 3.5$$

$$s_1 = 2.14 \quad s_2 = -2.14 \quad s_3 = 1.87 \quad s_4 = -1.87$$



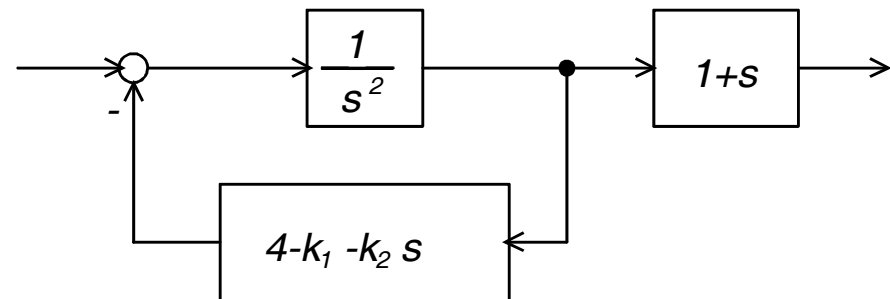
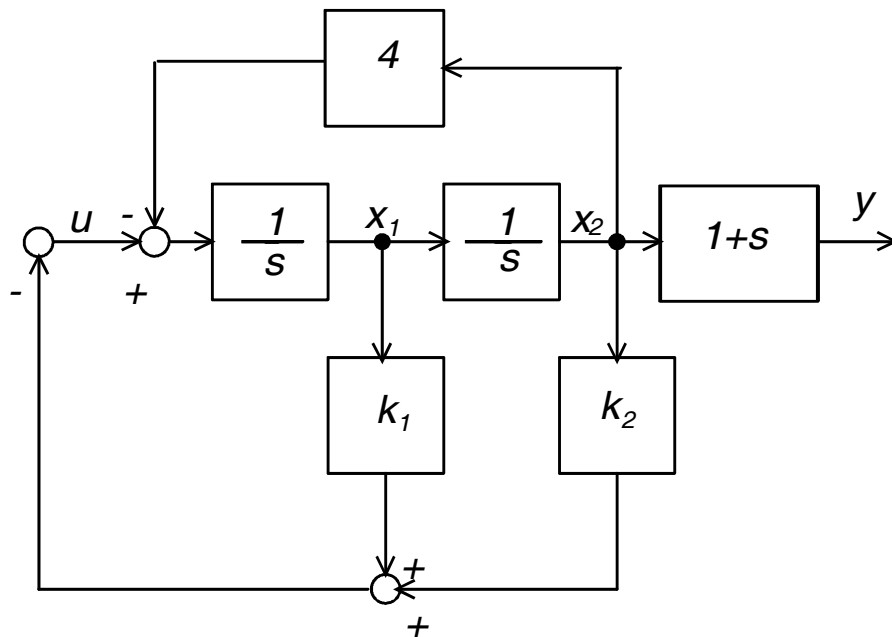
*Estes são os pólos do sistema em cadeia fechada com o controlador óptimo*

O vector de ganhos óptimos é determinado por forma a que os pólos da cadeia fechada sejam  $-2.14$  e  $-1.87$

O polinómio característico desejado para a cadeia fechada é pois

$$\alpha(s) = (s + 2.14)(s + 1.87) = s^2 + 4.01s + 4$$

Diagrama de blocos do sistema em cadeia fechada com retroacção (genérica) do estado:



Equação característica da cadeia fechada

$$1 - \frac{1}{s^2}(4 - k_1 - k_2 s) = 0$$

Polinómio característico da cadeia fechada

$$\alpha_K(s) = s^2 + k_2 s + k_1 - 4$$

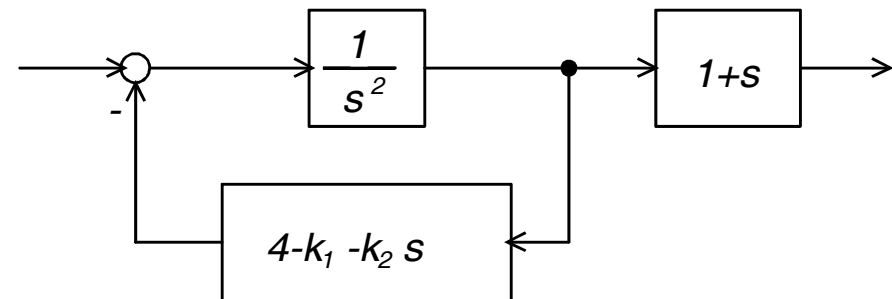
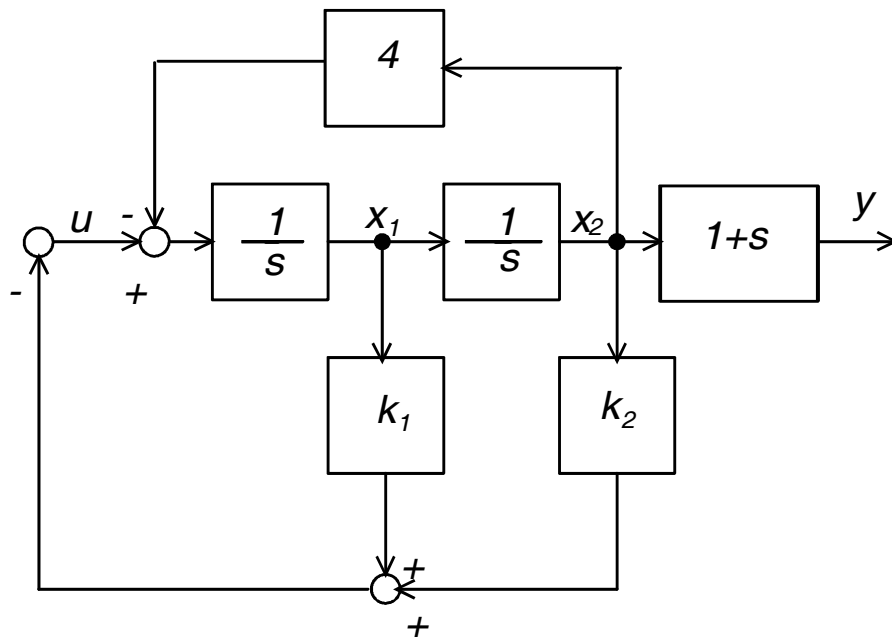
Comparando com o polinómio característico desejado

$$\alpha(s) = s^2 + 4.01s + 4$$

Obtêm-se os ganhos ótimos

$$k_1^{opt} = 8 \quad k_2^{opt} = 4.01$$

Diagrama de blocos do sistema em cadeia fechada com retroacção (genérica) do estado:



Equação característica da cadeia fechada

$$1 - \frac{1}{s^2}(4 - k_1 - k_2 s) = 0$$

Polinómio característico da cadeia fechada

$$\alpha_K(s) = s^2 + k_2 s + k_1 - 4$$

Comparando com o polinómio característico desejado

$$\alpha(s) = s^2 + 4.01s + 4$$

Obtêm-se os ganhos ótimos

$$k_1^{opt} = 8 \quad k_2^{opt} = 4.01$$

### O "root square locus"

As frequências naturais ("pólos") do sistema em cadeia fechada com controlo LQ de horizonte infinito são dadas pelas raízes estáveis da equação

$$a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s) = 0$$

A esta equação pode dar-se a forma

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{b(s)b(-s)}{a(s)a(-s)} = -1$$

O que acontece a estas raízes quando o peso  $\rho$  no controlo varia?

$$a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s) = 0$$

Quando o peso no controlo é muito grande ( $\rho$  grande) a equação fica aproximadamente:

$$a(s)a(-s) = 0$$

Assim, neste caso, os pólos da cadeia fechada, ou são os pólos da cadeia aberta se estes forem estáveis ou os seus simétricos se estes estiverem no semiplano complexo direito.



$$a(s)a(-s) + \frac{1}{\rho}b(s)b(-s) = 0$$

Analogamente, se  $\rho$  for muito pequeno, os pólos da cadeia fechada aproximam-se dos zeros da cadeia aberta se estes forem de fase mínima (ou seja, se estiverem à esquerda do eixo imaginário) ou dos seus simétricos se os zeros estiverem à direita.

Se houver mais pólos do que zeros, os pólos restantes tendem para  $-\infty$ .

Repare-se que não se pode ter  $\rho = 0$  para o problema LQ em tempo contínuo pois os ganhos do controlador seriam infinitos. Esta situação é **diferente em tempo discreto**, onde é possível ter  $\rho = 0$ .

Para valores intermédios de  $\rho$  os pólos do sistema com controlo ótimo podem obter-se traçando o *root-locus* de

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{b(s)b(-s)}{a(s)a(-s)} = -1$$

e tomando a sua parte estável.

É a isto que se chama o ***root-square-locus***.

### ***Root square locus - exemplo***

Considere-se o modelo do sistema instável em cadeia aberta correspondente à linearização do pêndulo invertido:

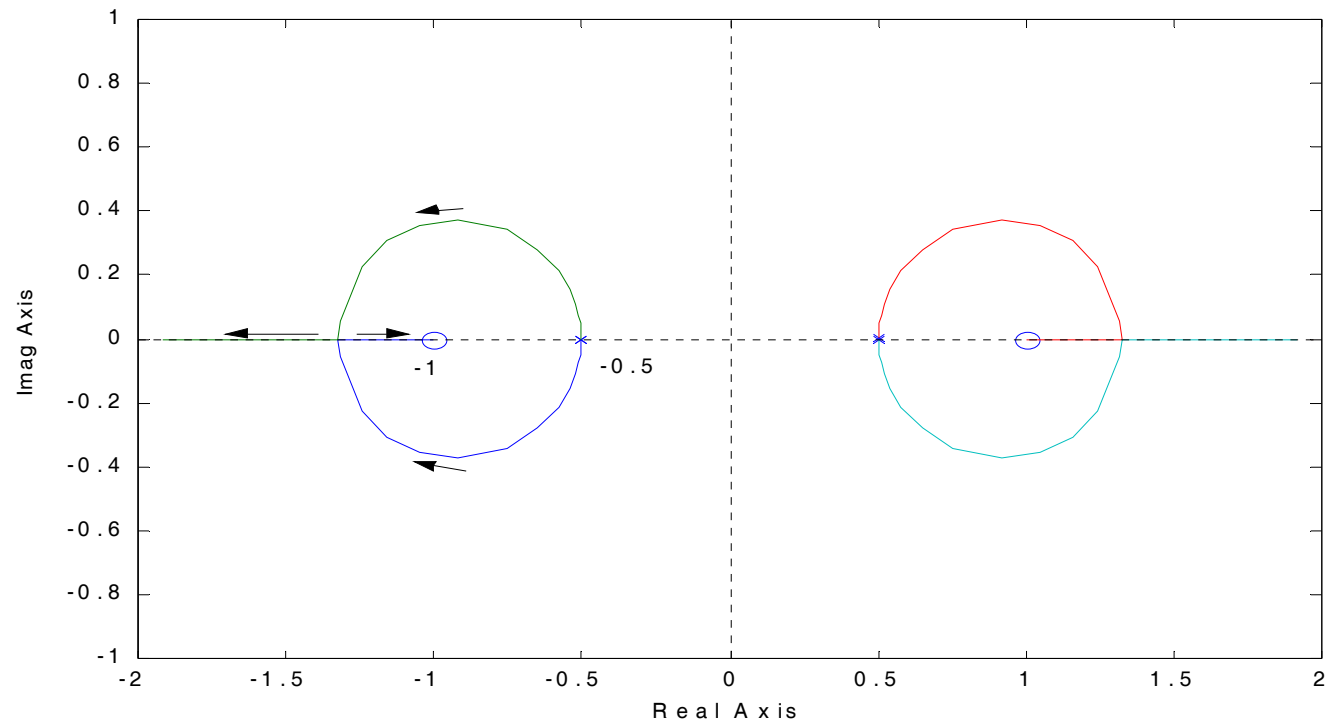
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1]$$

A função de transferência em cadeia fechada é

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{s + 1}{s^2 - 0.25}$$

O *root square locus* correspondente é



## Estabilidade relativa do Controlador LQ

Considere-se o sistema descrito pelo modelo de estado linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

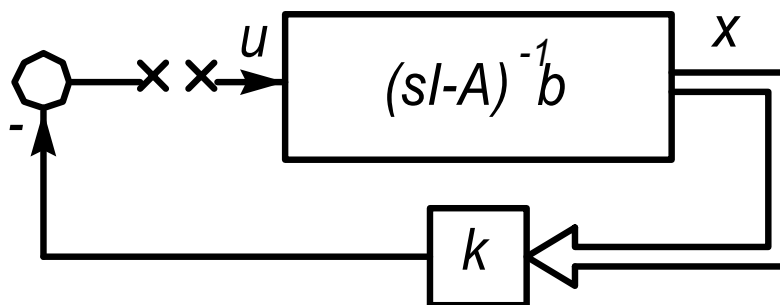
Têm-se as seguintes definições:

*Transformada de Laplace da Matriz de Transição de estado do sistema em cadeia aberta:*

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

*Ganho de malha:*

Obtido interrompendo a cadeia de controlo à entrada e multiplicando todos os ganhos.



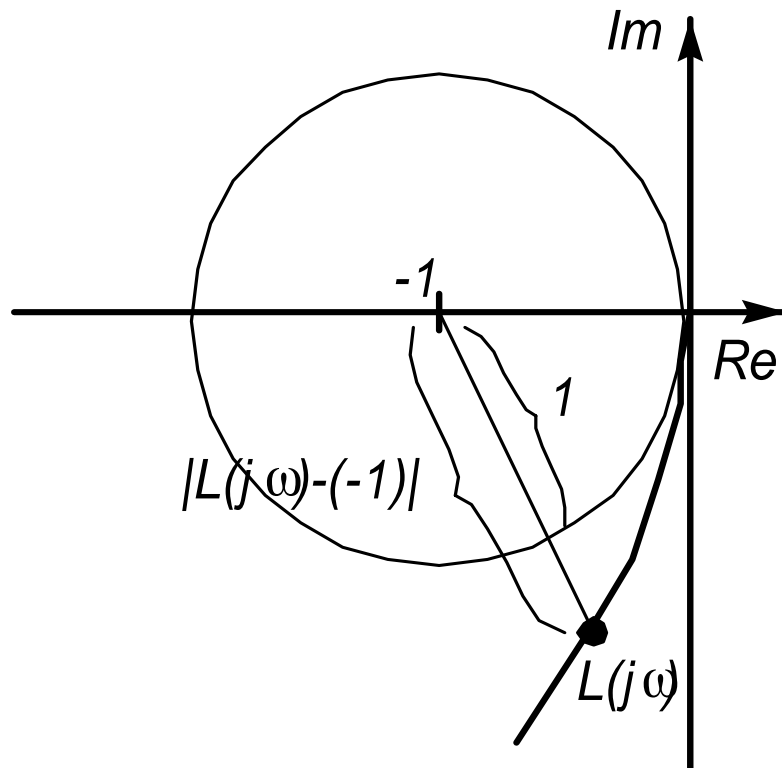
$$L(s) = k\Phi(s)b$$

Desigualdade de Kalman:

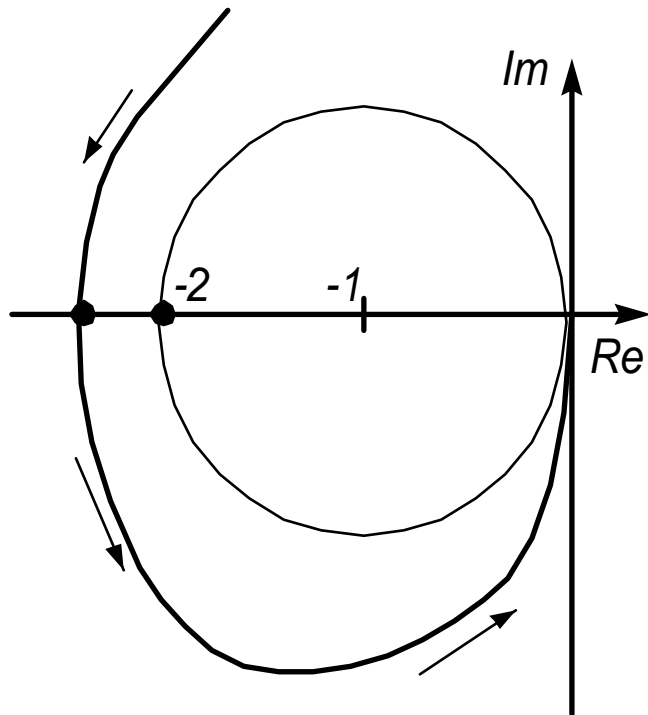
$$|1 + L(j\omega)| \geq 1$$

Consequência da Desigualdade de Kalman:

$$|1 + L(j\omega)| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |L(j\omega) - (-1)| \geq 1$$



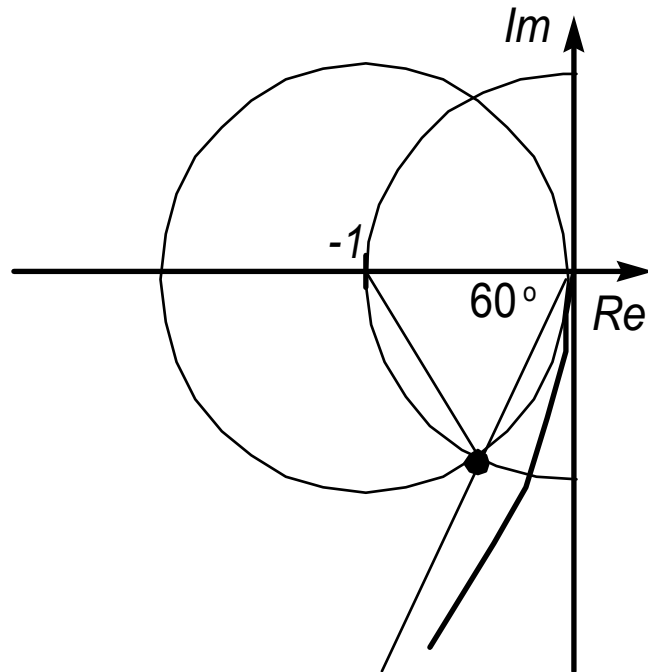
*Conclusão:* O diagrama de Nyquist de  $L(j\omega)$  nunca entra dentro da circunferência de raio 1, centrada em  $-1$ .



No caso mais desfavorável, o controlador LQ tolera uma redução do ganho de  $\frac{1}{2}$  até que o ganho de malha atinja o ponto  $-1$ .

A margem de ganho é pois de pelo menos 0.5.





No caso mais desfavorável o controlador LQ tolera uma redução da fase de pelo menos  $60^\circ$  até que o ganho de malha atinja o ponto  $-1$ .

A margem de fase do controlador LQ é de pelo menos  $60^\circ$ .

## O Filtro de Kalman-Bucy

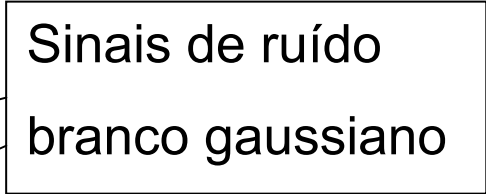
*Objectivo:* Dimensionar os ganhos do observador usando um critério de optimização.

Modelo do processo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + w(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t)$$

Sinais de ruído  
branco gaussiano



Os sinais  $v$  e  $w$  são sinais grancos e Gaussianos tal que

$$E[w(t)w^T(t + \tau)] = Q_o \delta(\tau)$$

$$E[v(t)v^T(t + \tau)] = R_o \delta(\tau)$$

O filtro de Kalman-Bucy dá *recursivamente* a estimativa  $\hat{x}$  do estado que é:

*Centrada:*

$$E[x(t) - \hat{x}(t)] = 0$$

*Minimiza:*

$$\int_0^{\infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 dt$$

ou seja o erro tem energia mínima.

## Equações do filtro de Kalman-Bucy

A estimativa  $\hat{x}$  é propagada no tempo resolvendo a equação diferencial:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L_o(y(t) - C\hat{x}(t))$$

O vector de ganhos óptimo é dado por

$$L_o = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

A matriz  $\Sigma$  é a solução simétrica e semidefinida positiva da equação de Riccati algébrica do filtro, dada por:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C \Sigma = 0$$

O filtro de Kalman-Bucy é um observador ótimo em que a largura de banda é ajustada por forma a otimizar a relação sinal/ruído, escolhendo um ganho adequado.

Repare-se que se não houver ruído de observação ( $R_0 = 0$ ), o problema fica singular, sendo o vector de ganhos infinito.

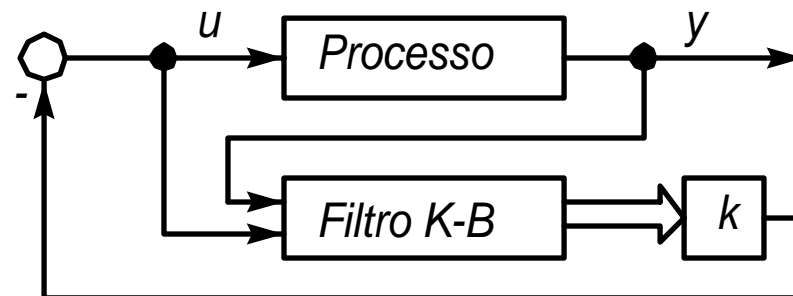
## Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

*Combina:*

A estimação do estado com um filtro de Kalman

*com*

A realimentação da estimativa  $\hat{x}$  com um controlador óptimo LQ, projectado supondo que se tem acesso ao estado.



O Teorema de Separação é válido para o controlador LQG.

**Rudolph Kalman** nasceu em 1930, em Budapest na Hungria Emigrou para os U.S.A., onde estudou no MIT e, posteriormente, na Universidade de Colúmbia, onde fez o seu doutoramento. No início dos anos 60, o seu nome ficou ligado aos artigos que estabeleceram os fundamentos do Controlo LQ e LQG e à filtragem óptima linear com base no modelo de estado, que desenvolveu em conjunto com **Richard Bucy**. Foi Kalman que “trouxe” para a comunidade do Controlo os métodos desenvolvidos por Lyapunov 70 anos antes e que os aplicou ao estudo da estabilidade de sistemas descritos por modelos de estado lineares.



## Equações do Regulador LQG

Equações do estimador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + L_o(y(t) - C\hat{x}(t))$$

$$L_o = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C \Sigma = 0 \quad \Sigma = \Sigma^T \geq 0$$

Equações do regulador

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad K = \frac{1}{\rho} B^T P \quad A^T P + PA - \frac{1}{\rho} PBB^T P + Q = 0$$



## Função de transferência do regulador LQG

$$G_{CLQG}(s) = K(sI - A + BK + L_o C)^{-1} L_o$$

É semelhante à do compensador baseado em observador que se estudou no capítulo sobre RLVE.

A diferença reside no modo como são calculados os ganhos  $K$  e  $L_o$ , que aqui são calculados por forma a otimizar um funcional (cada um deles).

## Recuperação do Ganho de Malha

### *Loop Transfer Recovery (LTR)*

Não há qualquer garantia sobre as margens de estabilidade (margem de ganho e margem de fase) do regulador LQG. Estas margens podem ser perigosamente baixas, dependendo das características estatísticas do ruído.

*Idéia:* Usar os parâmetros que definem a estatística do ruído,  $R_o$  e  $Q_o$  como parâmetros de ajuste para recuperar o ganho de malha que se obteria com um regulador LQ (e que tem boas características de estabilidade relativa).

É nisto que consiste o controlo LQG-LTR (LQG com recuperação do ganho de malha).

Pode demonstrar-se que se:

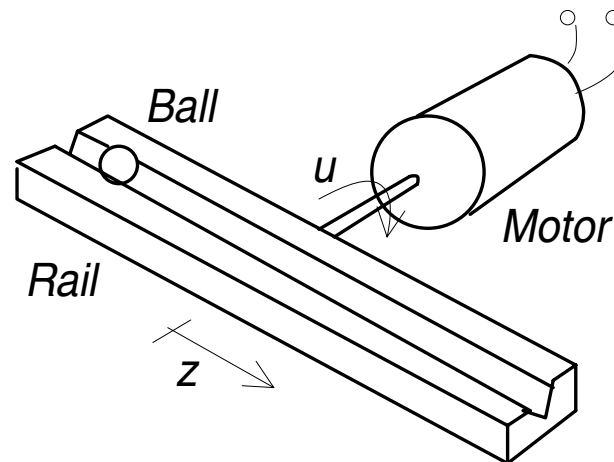
- 1)  $G(s)$  é de fase mínima;
- 2)  $R_0 = 1$  e  $Q_0 = q^2 BB^T$

Então

$$\lim_{q \rightarrow \infty} L_{LQG}(s) = L_{LQ}(s)$$

Isto sugere que se projecte um filtro de Kalman-Bucy em que o parâmetro  $q$  é muito elevado.

## Exemplo: Controlo de um integrador duplo



Este e outros sistemas podem ser modelados como um integrador duplo, tomando como variáveis de estado

$$x_1 = z \quad x_2 = \dot{z}$$

## Modelo do integrador duplo

Modelo de estado do integrador duplo:

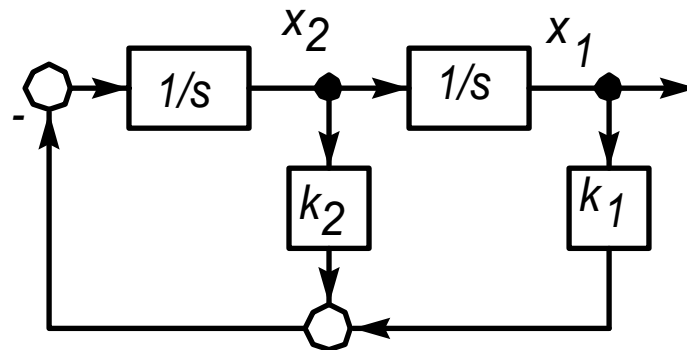
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Função de transferência do integrador duplo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

## Integrador duplo com regulador LQ



Pretende-se escolher os ganhos  $k_1$  e  $k_2$  por forma a minimizar o custo quadrático de horizonte infinito:

$$J_{LQ} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2(t) + \rho u^2(t)] dt$$

Assume-se que se tem acesso directo à medida de  $x_1$  e  $x_2$ .

Equação Algébrica de Riccati (ARE):

$$A'P + PA + Q - \frac{1}{\rho} PBB'P = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad Q = C'C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A ARE fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_2^2 = 1 \\ p_1 = p_2 p_3 \\ 2p_2 - p_3^2 = 0 \end{cases} \rightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ganho ótimo:

$$K_{LQ} = \frac{1}{\rho} B' P$$

Como

$$B' = [0 \quad 1] \quad P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vem

$$K_{LQ} = [1 \quad \sqrt{2}]$$



Com os ganhos ótimos, a dinâmica do sistema em cadeia fechada fica:

$$A - BK_{LQ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Equação característica da cadeia fechada:

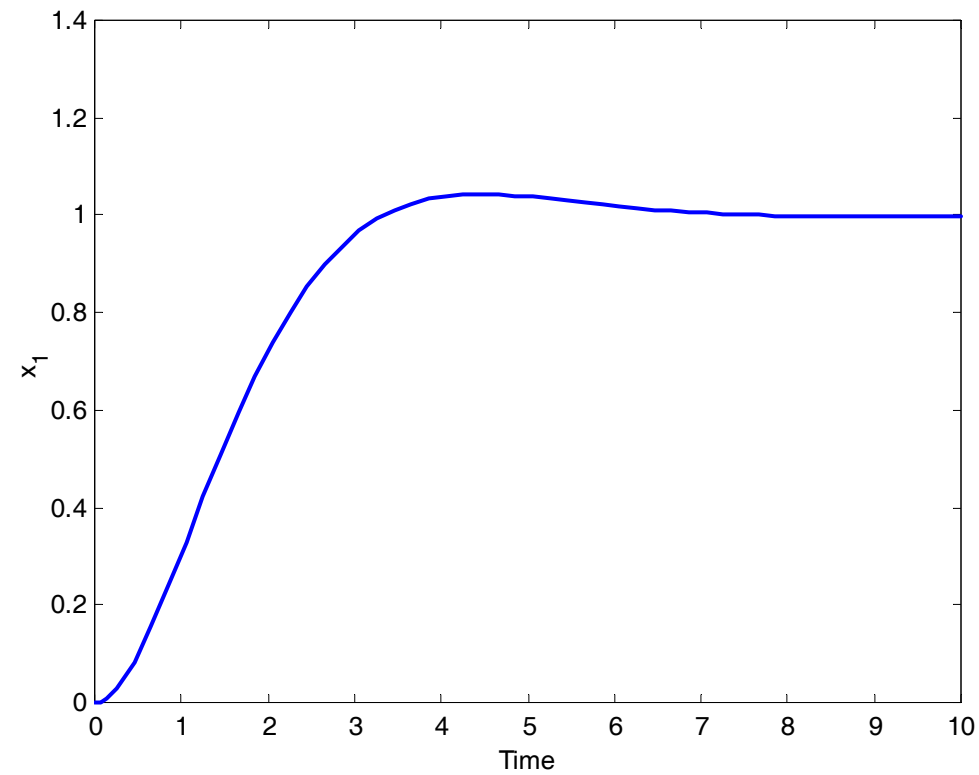
$$\det(sI - A + BK_{LQ}) = s^2 + \sqrt{2}s + 1 = 0$$

Pólos da cadeia fechada

$$s_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)$$

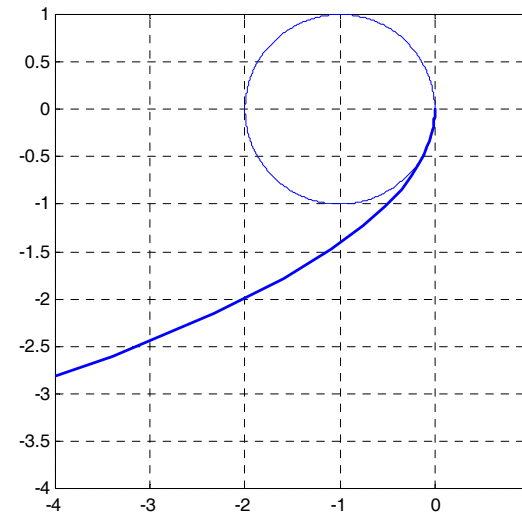
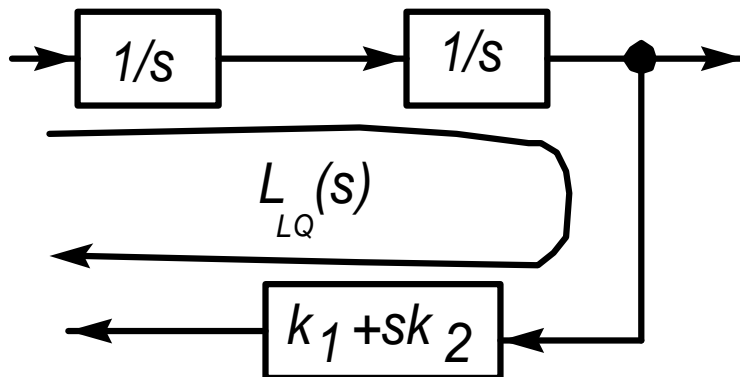
O sistema em cadeia fechada fica estável e com um coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0.707$ .

## Resposta ao escalão do sistema com controlo LQ



Ganho de malha com controlo LQ:

$$L_{LQ}(s) = K\Phi(s)B = K(sI - A)^{-1}B \quad \rightarrow \quad L(s) = \frac{\sqrt{2}s + 1}{s^2}$$



Como esperado, o ganho de malha não entra no círculo de raio 1.

Modelo do integrador duplo com ruído:

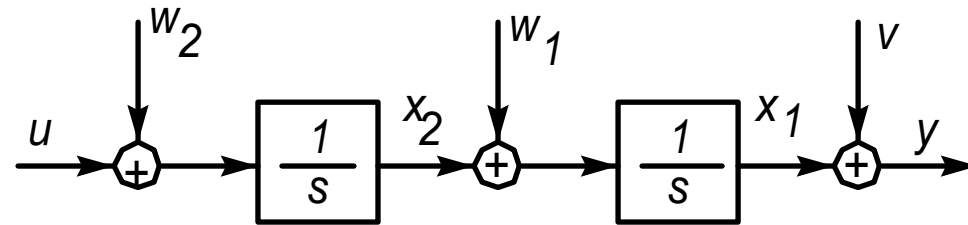
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + v(t)$$

Os sinais  $v$ ,  $w_1$  e  $w_2$  são sinais estocásticos mutuamente independentes, cujas características estatísticas são usadas para ajustar o ganho de malha:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) \end{bmatrix} \right\} = Q_o \qquad E[v^2(t)] = R_o$$

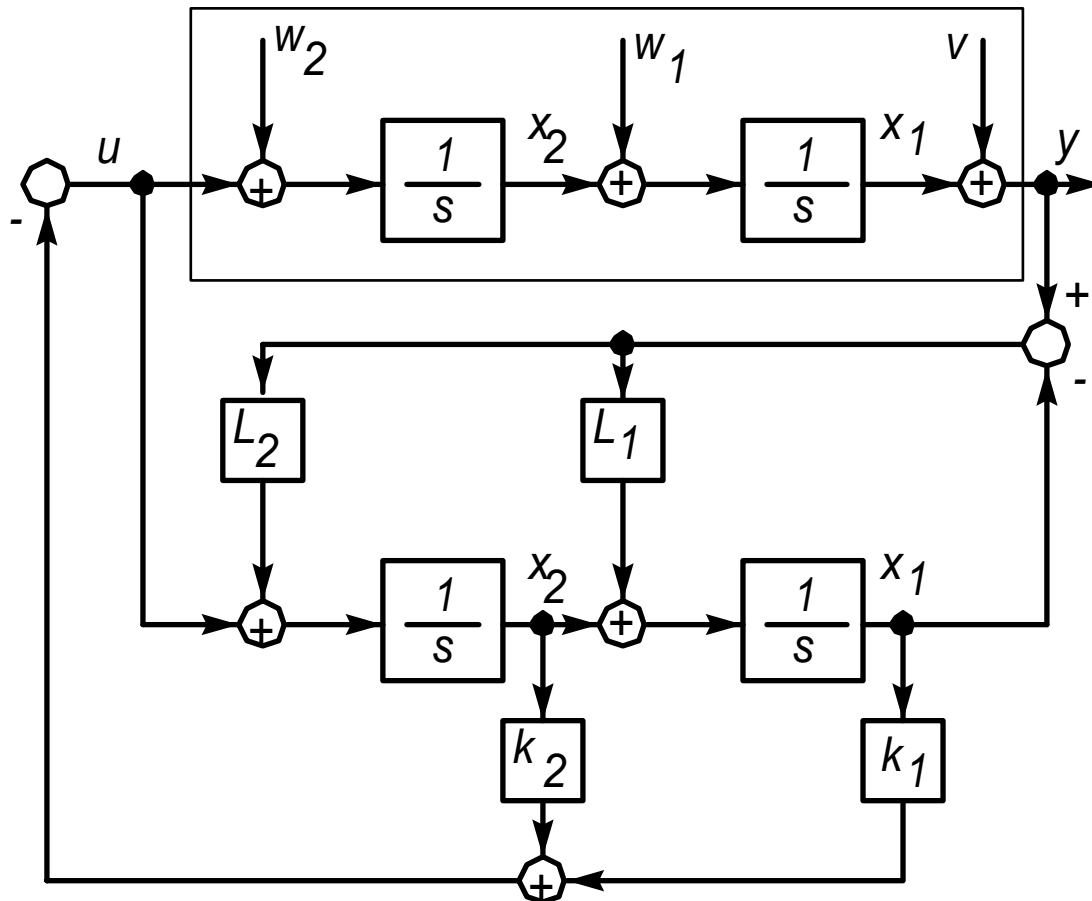
Diagrama de blocos do integrador duplo com ruído:



Vamos assumir

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_o = 1$$

## Integrador duplo com controlador LQG



$k_1$ ,  $k_2$  projectados tal como no regulador LQ.

$L_1$ ,  $L_2$  projectados de acordo com o dimensionamento do filtro de Kalman-Bucy

## Cálculo dos ganhos do filtro de Kalman-Bucy

Equação de Riccati para o filtro:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_o - \Sigma C^T R_o^{-1} C \Sigma = 0$$

Assumindo  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}$  e usando o método dos coeficientes

indeterminados obtém-se a solução definida positiva:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Ganhos ótimos do filtro:

$$L = \Sigma C^T R_o^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

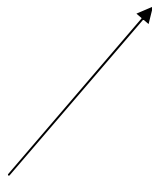
Função de transferência do compensador LQG:

$$G_{CLQG} = K_{LQ} (sI - A + BK_{LQ} + LC)^{-1} L$$


$$G_{CLQG} = \frac{3.14(s + 0.31)}{s + 1.57 \pm j1.4}$$



Pólos da cadeia fechada do integrador duplo com LQG:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm j)$$


Pólos do sistema  
controlado com LQ,  
supondo acesso ao estado

$$\frac{-\sqrt{3} \pm j}{2}$$


Pólos do filtro

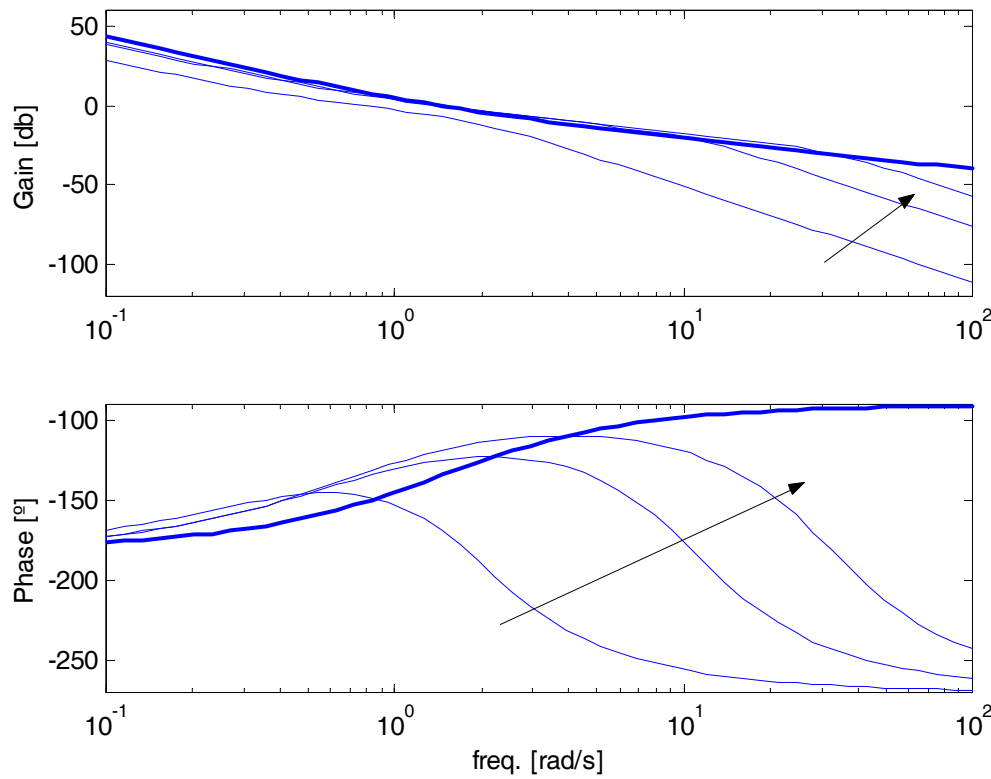
*Intencionalmente deixada branca*

*Intencionalmente deixada branca*

## Comparação dos reguladores LQ e LQG

1. O LQ tem maiores margens de estabilidade.
2. Nas baixa frequência o ganho de malha do LQ é maior do que o do LQG.  
Isto implica que o LQ tem melhores propriedades de seguimento do que o LQG.
3. A frequência de corte é maior no LQ do que no LQG
  - a. O LQ é mais susceptível ao ruído
  - b. O LQ é mais rápido a responder
4. Na alta frequência, a inclinação da curva de ganho é  $-20\text{dB/déc.}$  no LQ e  $-60\text{dB/déc.}$  no LQG. O LQ é mais susceptível ao ruído do que o LQG, mas tem melhor estabilidade relativa.

## Recuperação do ganho de malha no integrador duplo com controlo LQG



$q = 1, 100, 1000$