2.O Princípio de Pontriagyn

Objectivo:

Formular o Princípio do Máximo de Pontriagyn para problemas sem restrições no estado terminal e ganhar familiaridade com a sua aplicação em situações simples

Princípio de Pontryagin - Formulação do Problema

Sendo *x* o estado do sistema com entrada *u*, que satisfaz a equação de estado seguinte

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T] \quad u(t) \in U$$

T *fixo*

pretende-se determinar a função u, definida no intervalo $[0, T]$ que maximiza o funcional de custo *J* definido por

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x, u)dt$$

Examinemos a estrutura do funcional de custo

Limite superior do intervalo de optimização, suposto fixo

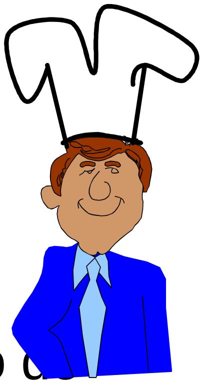
L denomina-se função Lagrangeana

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

Contribuição para *J* associada ao estado terminal *x(T)*

Contribuição para *J* , associada ao que sucede durante o intervalo de optimização

Para perceber o papel do custo terminal imaginemos que somos donos de um restaurante que pretendemos gerir por forma a maximizar o lucro.



O lucro obtido com o restaurante depende de duas parcelas

Lucro total = Lucro obtido na venda + Lucro obtido ao longo do tempo com a venda de comida

Valor terminal

Repare-se que há problemas importantes em que:

- O valor de T é livre e não fixo à partida
- Há restrições no estado terminal

É possível estender o Princípio de Pontriagyn para estes casos.

A variável manipulada *u* toma valores no conjunto U dos valores admissíveis para o controlo.

Este conjunto traduz **restrições** no valor de *u*.

Por exemplo, no caso em que a variável manipulada é a abertura de uma válvula, em que 0 corresponde a válvula toda aberta e 100 a válvula toda fechada, é

$$U = [0, 100]$$

Eventualmente, podemos estar interessados em resolver o problema de optimização num conjunto de valores admissíveis que é um subconjunto deste.

Princípio de Pontriagyn

Ao longo da trajectória óptima para *x*, *u* e λ verificam-se as seguintes condições necessárias para a maximização de *J*:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T] \;\; u(t) \in U$$

$$-\dot{\lambda}'(t) = \lambda'(t) f_x\big(x(t), u(t)\big) + L_x\big(x(t), u(t)\big)$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x) \Big|_{x = x(T)}$$

Condição terminal no co-estado

Para cada *t*, a hamiltoniana *H* definida por

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x, u) + L(x, u)$$

é máxima para o valor óptimo de *u(t)*.

É utilizada a seguinte notação:

$$\Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)} = \left[\left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_1}\right|_{x=x(T)} \quad \cdots \quad \left.\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_n}\right|_{x=x(T)} \right]$$

$$L_x(x,u) = \left[\frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} \right]$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

O vector λ designa-se por **co-estado** e a respectiva equação diferencial por **equação adjunta**.

A condição de máximo para a Hamiltoniana significa que, ao longo das trajectórias de x e λ definidas pelo controlo óptimo u, se verifica para cada instante de tempo t

$$H(\lambda(t), x(t), v) \leq H(\lambda(t), x(t), u(t))$$

qualquer que seja o valor de v.

O Princípio de Pontriagyn permite pois transformar um problema de minimização em ordem numa função num problema de minimização em ordem à variável $u(t)$, para cada instante t.

No caso em que o óptimo da Hamiltoniana é atingido no **interior** do conjunto de controlos admissíveis U, a condição de máximo é satisfeita numa das soluções da equação

$$\frac{dH}{du} = 0$$

Repare-se que esta equação pode ter outras soluções, correspondentes a mínimos ou a pontos de estacionariedade.

Se o óptimo fôr atingido na fronteira de U, a equação anterior **não** pode ser utilizada para o determinar.

O Princípio de Pontriagyn é uma condição **necessária** satisfeita pelas soluções do problema de controlo óptimo.

Pode haver funções de controlo que satisfação o Princípio de Pontriagyn mas que não correspondem a máximos do funcional de custo.

O interesse do Princípio de Pontriagyn nestes casos consiste em reduzir o número de hipóteses para as funções de controlo óptimo, tornando então possível eliminar as soluções não óptimas, por exemplo analisando-as uma a uma.

Tal como foi formulado, o Princípio de Pontriagyn diz respeito à **maximização** de um funcional.

O problema da **minimização** de um custo pode ser facilmente tratado multiplicando o respectivo funcional por -1.

Exemplo 1

Pretende-se desenhar uma curva $x(t)$ que comece em $x(0) = 0$, cuja inclinação máxima seja 1 e que atinja a altura máxima para *t*=*T*.

O problema pode ser formulado como um problema de controlo óptimo com dinâmica

$$\dot{x}(t) = u(t) \qquad x(0) = 0 \qquad U = \{u | u < 1\}$$

e funcional de custo

$$J = x(T)$$

Quais as condições impostas pelo Princípio de Pontriagyn?

$$-\dot{\lambda}'(t) = \lambda'(t)\, f_x\big(x(t), u(t)\big) + L_x\big(x(t), u(t)\big) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\,\Big|_{x=x(T)}$$

Como

$$f_x(x,u) = 0 \qquad \text{e} \qquad L(x,u) = 0$$

a equação adjunta reduz-se a

$$-\dot{\lambda}(t) = 0$$

com a condição terminal

$$\lambda(T) = 1 \quad \text{pois} \quad \Psi(x(T)) = x(T)$$

Logo

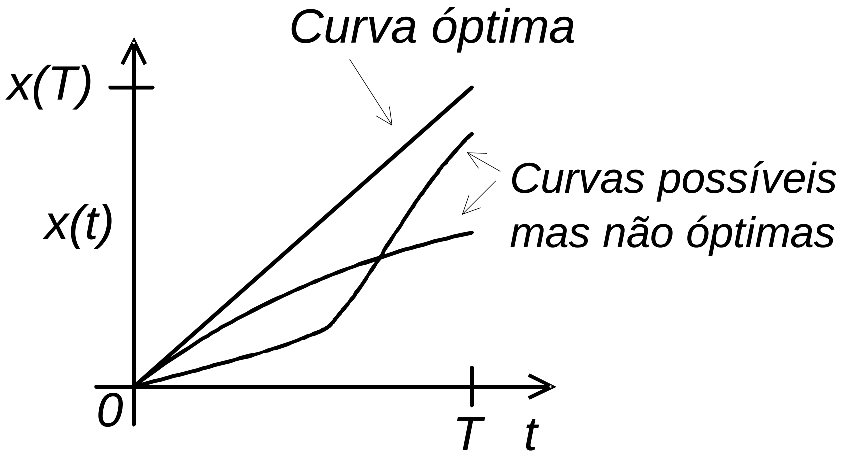
$$\lambda(t) = 1 \qquad 0 \le t \le T$$

A Hamiltoniana é

$$H = \lambda' f + L = \lambda u = u$$

Para cada *t* o valor de *u* que maximiza *H* no conjunto *U* é pois

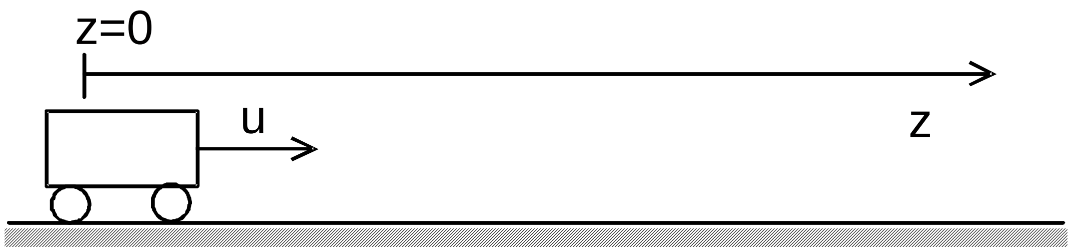
$$u_{opt}(t) = 1$$



O exemplo anterior pode ser facilmente resolvido sem ferramentas matemáticas especiais (se queremos subir o mais possível, devemos ter a derivada sempre no valor máximo). No entanto, é interessante ver a resposta dada pelo Princípio de Pontriagyn.

Considere-se agora um exemplo simples mas não trivial.

Exemplo 2 - Carro de empurrar



Objectivo: Escolher a função $u(t) \quad 0 \le t \le T$ que maximiza

$$J(u) = z(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

sendo a dinâmica do carro dada por (condições iniciais nulas):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = u$$

Sugestão:

- Tomar como variáveis de estado

$$x_1 = z \quad "posiçao"$$
$$x_2 = \dot{z} \quad "velocidade"$$

e escrever o modelo de estado na forma

$$\dot{x} = f(x)$$

- Escrever as condições impostas pelo Princípio de Pontryagin
- Concluir destas condições qual o controlo óptimo

Modelo de estado

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, u\right) \qquad \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(u) = x_1(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

$$\Psi\big(x(T)\big) = x_1(T) \quad \text{donde} \quad \Psi_x\big(x(T)\big) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$L(x,u) = -\frac{1}{2}u^2(t) \quad \text{donde} \quad L_x(x,u) = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

A equação adjunta é $-\dot{\lambda}' = \lambda' f_x + L_x$ ou seja

$$\begin{bmatrix}-\dot{\lambda}_1 & -\dot{\lambda}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}\dot{\lambda}_1 = 0\\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}\lambda_1(T) & \lambda_2(T)\end{bmatrix} = \Psi_x\big(x(T)\big) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1(T) & \lambda_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso a equação adjunta pode resolver-se independentemente da equação de estado.

Como

$$\dot{\lambda}_1(t) = 0 \quad \text{conclui-se} \quad \lambda_1(t) = C^{te}$$

Da condição final $\lambda_1(T) = 1$ conclui-se

$$\lambda_1(t) = 1$$

A equação para $\lambda_2(t)$ é

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1$$

Como $\lambda_1(t) = 1$ esta equação escreve-se

$$\dot{\lambda}_2(t) = -1$$

ou seja

$$\lambda_2(t) = C^{te} - t$$

Da condição final $\lambda_2(T) = 0$ vem

$$\lambda_2(t) = T - t$$

Hamiltoniana:

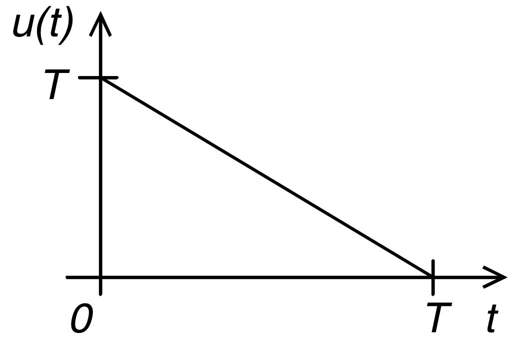
$$H(\lambda, x, u) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u - \frac{1}{2} u^2$$

Neste caso não há restrições (os valores possíveis para *u* são todo o conjunto $\Re$) pelo que a condição de máximo para a Hamiltoniana se obtém de

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \lambda_2 - u = 0 \quad \text{para cada } t$$

O controlo óptimo é, portanto

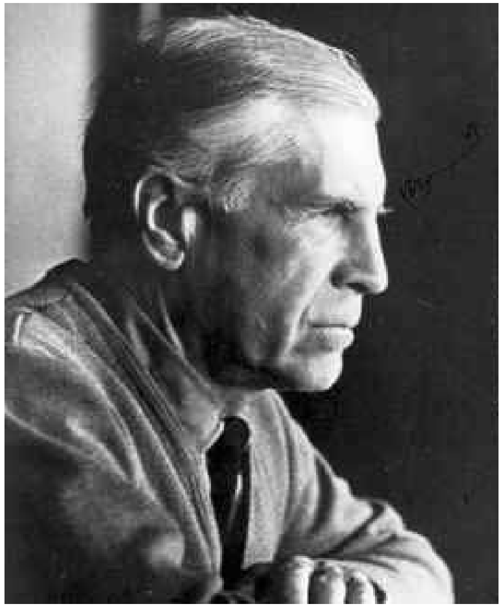
$$u_{opt}(t) = \lambda_2(t) = T - t$$



Nestes dois exemplos é possível resolver as equações do co-estado independentemente das do estado e do valor do controlo óptimo.

Normalmente não é assim**. As equações do estado e do co-estado aparecem acopladas**, formando um sistema de *2n* equações diferenciais a *2n* incógnitas, em que parte das incógnitas é especificada no início e outra parte no fim do intervalo de integração.

Veremos (por exemplo para dinâmica linear e custo quadrático) que em certos casos é possível desacoplar estas equações.



Lev **Pontryagin** (1908-1988) é uma figura controversa. Matemático brilhante, cegou aos 14 anos num acidente, o que não o impediu de se distinguir pelos seus trabalhos na teoria do Controlo Óptimo. O anúncio do Princípio ao qual o seu nome é ligado, feito no Congresso Internacional de Matemática de 1958, foi inicialmente recebido com grande frieza. A isto não foi alheia a motivação militar por detrás deste resultado relacionada com o planeamento das trajectórias de mísseis.

3.Justificação do Princípio de Pontryagin

Objectivo:

Justificar o Princípio do Máximo de Pontryagin para problemas sem restrições no estado terminal através de uma técnica de variação

Princípio de Pontryagin - Formulação do Problema

Sendo *x* o estado do sistema com entrada *u*, que satisfaz a equação de estado seguinte

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T] \quad u(t) \in U$$

T *fixo*

pretende-se determinar a função u, definida no intervalo $[0, T]$ que maximiza o funcional de custo *J* definido por

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x, u)dt$$

Estratégia para Justificação do Princípio de Pontryagin

Se u_{opt} é a função que maximiza o funcional $J(u)$ qualquer "pequena" variação através de uma função δu leva à diminuição do valor de $J(u)$:

$$\delta J = J(u_{opt} + \delta u) - J(u_{opt}) < 0$$

Passos na Justificação do Princípio de Pontryagin

- Modificação do funcional de custo através de uma funcional de custo por forma a simplificar o cálculo da sua variação quando o **controlo é perturbado**
- Cálculo da relação existente entre uma variação "pequena" no controlo óptimo e a correspondente **variação no funcional**. Retêm-se apenas termos de 1ª ordem
- Exprimir a condição de que a variação do funcional é negativa através de **uma condição de máximo na Hamiltoniana para cada instante de tempo**.

Modificação do custo

$$\bar{J} = J - \int_0^T \lambda'(t)\left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right]dt$$

Como o termo entre parentesis rectos é nulo ao longo das trajectórias do sistema, $\bar{J} = J$ pelo que o valor de u que optimiza $\bar{J}$ é o mesmo que optimiza J.

Assim, podemos escolher λ por forma a simplificar o problema.

A esta quantidade (vectorial) dá-se o nome de *co-estado*.

A Hamiltoniana

A função Hamiltoniana é definida por

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x, u) + L(x, u)$$

Com esta definição, o funcional modificado pode pois escrever-se:

$$\bar{J} = J - \int_0^T \lambda'(t)\left[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t))\right]dt = \Psi(x(T) + \int_0^T \left[L(x, u) + \lambda' f(x, u) - \lambda' \dot{x}\right]dt$$

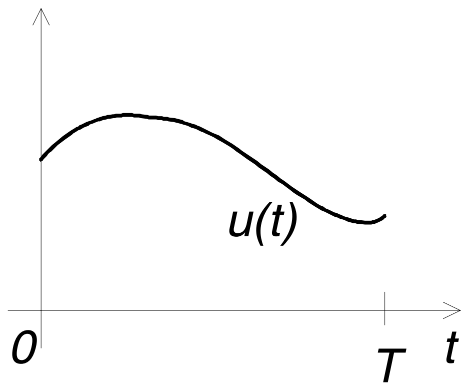
ou seja

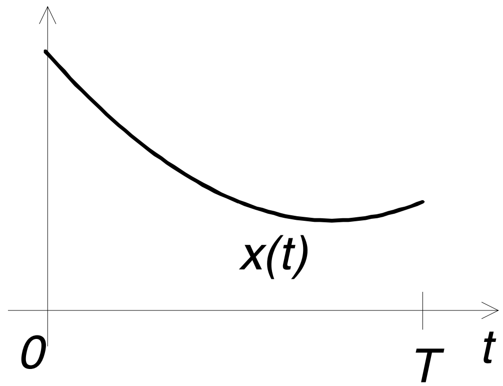
$$\bar{J} = \Psi(x(T)) + \int_0^T \left[H(\lambda(t), x(t), u(t)) - \lambda'(t)\dot{x}(t)\right]dt$$

Variação do Controlo Óptimo

Seja $\{u(t), 0 \le t \le T\}$ a função que traduz o controlo óptimo

Em conjunto com a condição inicial imposta ao estado, ele determina a trajectória de estado $\{x(t), 0 \le t \le T\}$.





É feita uma variação "pequena" da função *u* que define o controlo óptimo, obtendo-se uma função designada por *v*.

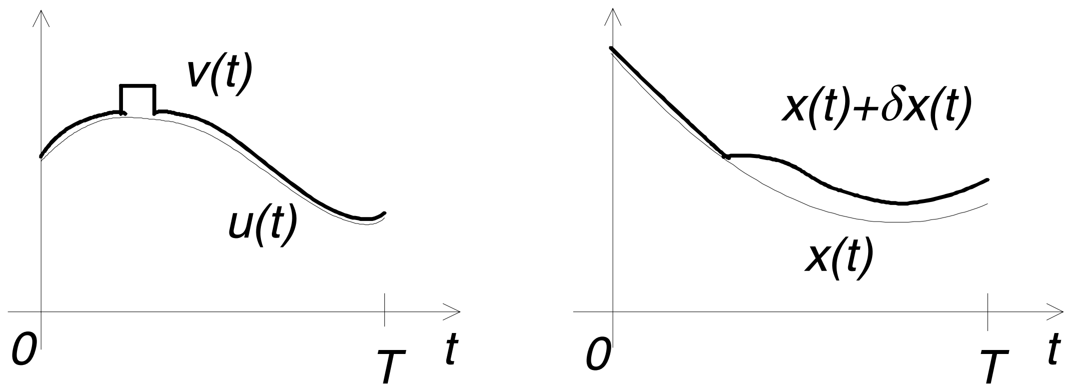
A variação é pequena no sentido em que, para cada uma das componentes u_i e v_i dos vectores *u* e *v*, se tem

$$\int_0^T \left| u_i(t) - v_i(t) \right| dt < \varepsilon$$

sendo ε um número pequeno.

A trajectória de estado correspondente a *v* depende essencialmente do controlo e desvia-se pouco do estado óptimo *x* correspondente a *u*.

Seja $\delta x(t)$ esta variação no estado.



Seja $\delta \bar{J}$ a correspondente variação na função objectivo

$$\delta \bar{J} = \bar{J}(v) - \bar{J}(u)$$

sendo *u* óptimo esta variação do custo é **negativa**.

Cálculo da variação do funcional

Recorde-se que

$$\bar{J} = \Psi\big(x(T)\big) + \int_0^T \Big[H\big(\lambda(t), x(t), u(t)\big) - \lambda'(t)\dot{x}(t)\Big]dt$$

A variação é assim

$$\delta\bar{J} = \Psi\big(x(T) + \delta x(T)\big) - \Psi\big(x(T)\big) + \int_0^T \Big[H\big(\lambda, x + \delta x, v\big) - H\big(\lambda, x, u\big) - \lambda'\delta\dot{x}\Big]dt$$

Recorde-se a regra de integração por partes:

Como $\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}$ é $\int_0^T (\dot{a}b)dt = (ab)\Big|_0^T - \int_0^T (a\dot{b})dt$

Aplique-se esta regra com

$$a = \delta x \qquad b = \lambda'$$

$$\int_0^T \lambda' \delta\dot{x} dt = \lambda'(T)\delta x(T) - \lambda'(0)\delta x(0) - \int_0^T \dot{\lambda}' \delta x dt$$

Repare-se que $\delta x(0) = 0$ porque a variação do controlo óptimo não causa qualquer variação na condição inicial do estado.

$$\int_0^T \lambda' \delta \dot{x} dt = \lambda'(T)\delta x(T) - \int_0^T \dot{\lambda}' \delta x dt$$

Tinha-se concluído que a variação do funcional é

$$\delta \bar{J} = \Psi\big(x(T) + \delta x(T)\big) - \Psi\big(x(T)\big) + \int_0^T \big[H\big(\lambda, x + \delta x, v\big) - H\big(\lambda, x, u\big) - \lambda' \delta \dot{x}\big] dt$$

Assim:

$$\delta \bar{J} = \Psi\big(x(T) + \delta x(T)\big) - \Psi\big(x(T)\big) - \lambda'(T)\delta x(T) + \int_0^T \big[H\big(\lambda, x + \delta x, v\big) - H\big(\lambda, x, u\big) + \dot{\lambda}' \delta x\big] dt$$

Através da integração por partes conseguimos exprimir as variações na derivada do estado em variações no estado (e derivadas do coestado λ).

$$\delta\bar{J} = \Psi\big(x(T)+\delta x(T)\big) - \Psi\big(x(T)\big) - \lambda'(T)\delta x(T) + \int_0^T \Big[H\big(\lambda, x+\delta x, v\big) - H\big(\lambda, x, u\big) + \dot{\lambda}'\delta x\Big]dt$$

Vamos aproximar o efeito da variação do estado na variação dos termos em Ψ e H através de desenvolvimentos em série de Taylor de primeira ordem:

$$\Psi\big(x(T)+\delta x(T)\big) \approx \Psi\big(x(T)\big) + \Psi_x\big(x(T)\big)\delta x(T)$$

$$H\big(\lambda, x+\delta x, v\big) \approx H\big(\lambda, x, v\big) + H_x\big(\lambda, x, v\big)\delta x$$

Assim, a menos de termos de ordem superior ou igual a 2:

$$\delta\bar{J} = \left[\Psi_x\left(x(T)\right) - \lambda'(T)\right]\delta x(T) + \int_0^T \left[H_x\left(\lambda, x, u\right) + \dot{\lambda}'\right]\delta x dt + \int_0^T \left[H\left(\lambda, x, v\right) - H\left(\lambda, x, u\right)\right]dt$$

Escolhendo λ de modo a que satisfaça a equação diferencial

$$-\dot{\lambda}'(t) = H_x\left(\lambda(t), x(t), u(t)\right)$$

com a condição final

$$\lambda'(T) = \Psi_x\left(x(T)\right)$$

a expressão da variação do funcional reduz-se a

$$\delta\bar{J} = \int_0^T \left[H\left(\lambda(t), x(t), v(t)\right) - H\left(\lambda(t), x(t), u(t)\right)\right]dt$$

$$\delta\bar{J} = \int_0^T \left[H\big(\lambda(t), x(t), \underbrace{v(t)}_{\text{Perturbado}}\big) - H\big(\lambda(t), x(t), \underbrace{u(t)}_{\text{Óptimo}}\big) \right] dt$$

Esta expressão traduz o efeito na variação do funcional de uma variação do controlo óptimo.

Repare-se que λ, x e u são conhecidos e independentes da variação v.

Em particular, x e λ são calculados integrando as equações do estado e do co-estado com o controlo óptimo u.

$$\delta\bar{J} = \int_0^T \left[H\big(\lambda(t), x(t), v(t)\big) - H\big(\lambda(t), x(t), u(t)\big) \right] dt$$

Se u é óptimo, tem então de ser **para cada instante *t***:

$$H\big(\lambda(t), x(t), v\big) \le H\big(\lambda(t), x(t), u(t)\big)$$

$$\forall v \in U$$

Esta afirmação necessita ser demonstrada.

$$\delta\bar{J} = \int_0^T \left[H\big(\lambda(t), x(t), v(t)\big) - H\big(\lambda(t), x(t), u(t)\big) \right] dt$$

Suponhamos que existia um instante t_1 e uma função φ tal que

$$H\big(\lambda(t_1), x(t_1), \varphi(t_1)\big) > H\big(\lambda(t_1), x(t_1), u(t_1)\big)$$

Sendo H uma função contínua, existirá um intervalo $[t_1 - \sigma, t_1 + \sigma]$ em que esta propriedade se verifica. Escolha-se $v(t) = u(t)$ excepto neste intervalo em que se faz $v(t) = \varphi(t)$. Com esta escolha do controlo, a variação do funcional é

$$\delta\bar{J} = \int_{t_1-\sigma}^{t_1+\sigma} \left[H\big(\lambda(t), x(t), v(t)\big) - H\big(\lambda(t), x(t), u(t)\big) \right] dt > 0$$

valendo a desigualdade porque a integranda é positiva em todo o intervalo.

Isto contraria a hipótese de u ser o controlo óptimo.

4.Optimização de um Fermentador

Objectivo:

Aplicação do Princípio de Pontryagin à resolução de um problema com motivação em aplicações e em que a equação adjunta depende do controlo óptimo

Fermentador para a obtenção de penicilina

X - Quantidade de bactérias

por unidade de volume

P - Quantidade de penicilina

por unidade de volume

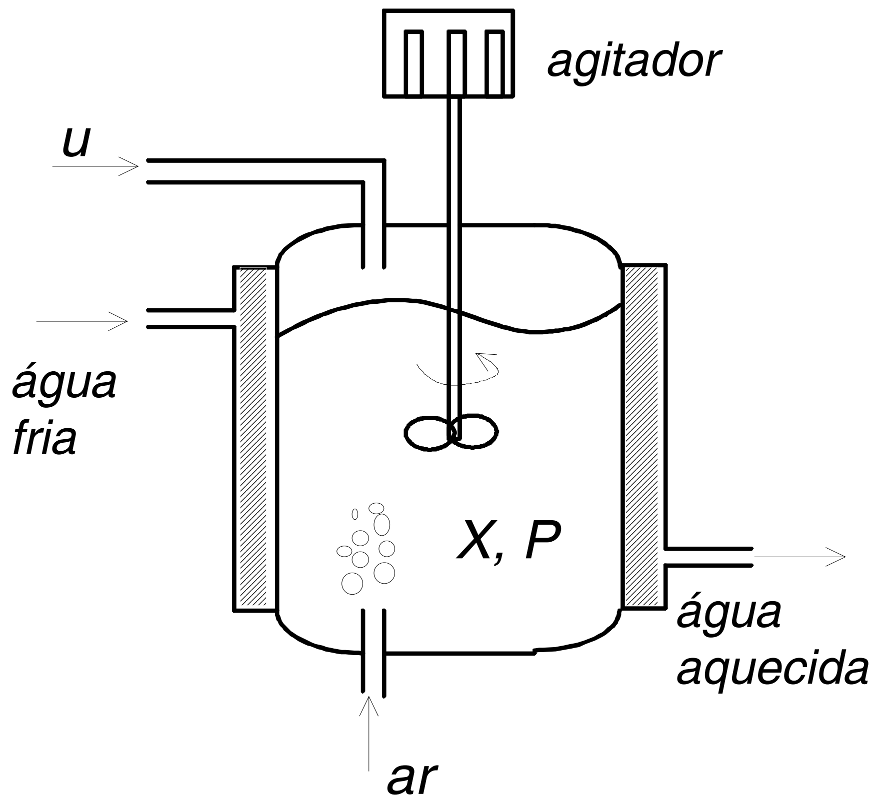
u - Variável manipulada: taxa de

adição de substracto

(açúcares para "alimentação"

das bactérias).

As bactérias produzem penicilina.



Um modelo muito simplificado do fermentador

Crescimento devido ao "alimento"

Mortalidade

$$\dot{X} = buX - \mu X$$

$$\dot{P} = c(1-u)X$$

Produção das bactérias

Inibição da produção pelo substracto

Resultados mais realistas requerem modelos mais complexos.

Efeito inibidor do substracto

A penicilina é produzida pelas bactérias cuja população, para tal, deve crescer. Para tal deve ser adicionado substracto ("alimento").

O substracto tem no entanto um efeito de inibição da produção da penicilina.

Para maximizar a produção de penicilina, há portanto um **compromisso** na escolha da taxa de adição de substracto, que vai ser a variável manipulada.

Este efeito está incluído no modelo considerado.

$$\dot{X} = buX - \mu X$$

$$\dot{P} = c(1-u)X$$

Por simplicidade, admite-se que o sistema de unidades é tal que

$$b = 1 \quad c = 1 \quad \mu = 0.5$$

Tem-se assim o modelo:

$$\dot{X} = buX - \mu X$$

$$\dot{P} = c(1-u)X$$

Condições iniciais:

$$X(0) = 1$$

$$P(0) = 0$$

Problema de Controlo Óptimo do Fermentador

Modelo de estado e condições iniciais:

$$\dot{X} = buX - \mu X$$

$$\dot{P} = c(1-u)X$$

Condições iniciais:

$$X(0) = 1$$

$$P(0) = 0$$

Objectivo:

Determinar $u(t) \quad 0 \le t \le T$, T fixo, por forma a que $J = P(T)$ seja máximo, sujeito à restrição (que define o conjunto dos controlos admissíveis):

$$0 \le u \le 1$$

Escreva a equação adjunta para este problema.

Recordações úteis:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0$$

$$J = \psi\big(x(T)\big) + \int_0^T L(x,u)dt$$

Equação adjunta e condição terminal no co-estado:

$$-\dot{\lambda}' = \lambda' f_x(x,u) + L_x(x,u) \qquad \lambda(T) = \psi_x(x(T))$$

Atenção: Neste problema,

$$x(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ P(t) \end{bmatrix}$$

O funcional de custo em geral é

$$J = \psi\big(x(T)\big) + \int_0^T L(x,u)dt$$

Neste caso

$$J_{fermentador} = P(T)$$

Conclui-se assim que neste problema a Lagrangeana é nula: $L(x,u) = 0$

e o custo terminal é: $\psi(x(T)) = P(T)$, pelo que

$$\psi_x(x(T)) = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=x(T)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O co-estado tem neste caso duas componentes

$$\lambda'(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

Como a Lagrangeana é nula, a sua derivada parcial em ordem ao estado também o é:

$$L_x(x,u) = 0$$

Como $f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,u) \\ f_2(x_1,x_2,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u-0.5)x_1 \\ (1-u)x_1 \end{bmatrix}$ é $f_x(x,u) = \begin{bmatrix} u-0.5 & 0 \\ 1-u & 0 \end{bmatrix}$

Equação adjunta:

$$-\dot{\lambda}' = \lambda' f_x(x,u) + L_x(x,u)$$

$$f_x(x,u) = \begin{bmatrix} u-0.5 & 0 \\ 1-u & 0 \end{bmatrix} \qquad L_x(x,u) = 0$$

Neste caso particular a equação do co-estado é pois:

$$-\dot{\lambda}_1 = (u-0.5)\lambda_1 + (1-u)\lambda_2$$

$$-\dot{\lambda}_2 = 0$$

Com condição terminal

$$\lambda_1(T) = 0 \quad \lambda_2(T) = 1$$

$$-\dot{\lambda}_1 = (u-0.5)\lambda_1 + (1-u)\lambda_2$$

$$-\dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\lambda_1(T) = 0 \quad \lambda_2(T) = 1$$

Tendo em conta as condições terminais

$$\lambda_2(t) = 1 \qquad 0 \le t \le T$$

e a equação para a primeira componente do co-estado reduz-se a

$$-\dot{\lambda}_1 = (u-0.5)\lambda_1 + 1 - u$$

Dificuldade: A equação depende de $u(t)$ e $u(t)$ depende de $\lambda(t)$…

Sugestão:

a) Escreva a Hamiltoniana para este caso particular. Recorde que

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f + L$$

b) Admita que conhece $\lambda(t)$. Determine $u(t)$ que maximiza H, para cada t. Tenha em conta a restrição $0 \leq u \leq 1$ e admita que $X > 0$

c) Da alínea b) conhece a forma de $u(t)$ em função de t. Em particular, qual o valor óptimo de $u(t)$ para t próximo de T? E qual a correspondente equação para $\lambda_1(t)$ neste período de tempo?

d) Ande "para trás" no tempo. O que acontece a $\lambda_1(t)$? E a $u_{optimo}(t)$?

$$H = \lambda' f + L$$

$$H = \lambda_1 f_1(X, P) + \lambda_2 f_2(X, P) + 0$$

$$H = \lambda_1 (u - 0.5) X + (1 - u) X$$

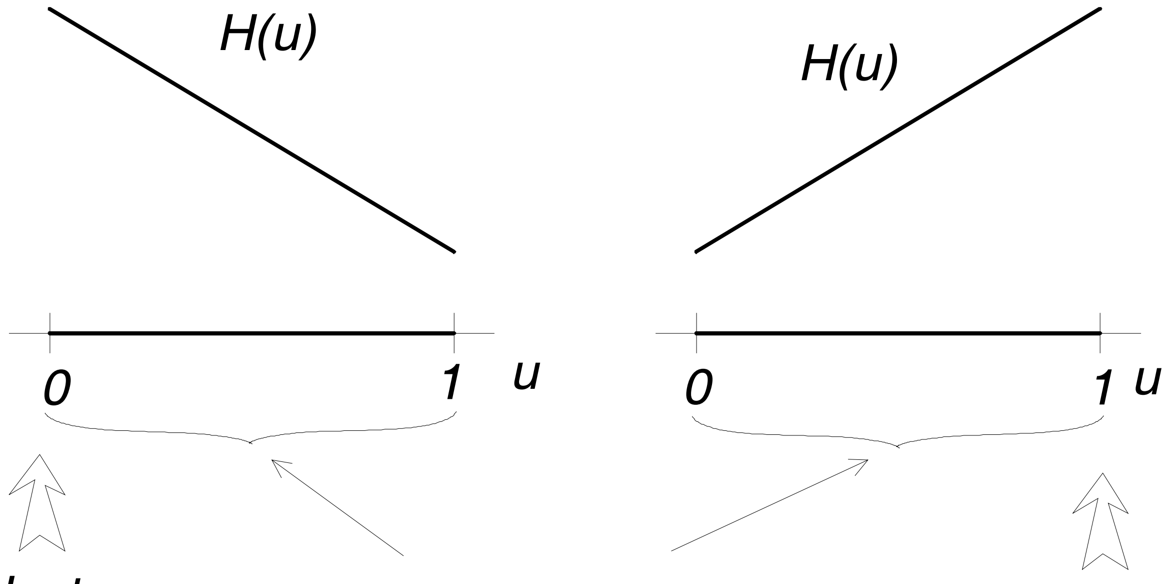
Pode ser escrita como

$$H = \left[(\lambda_1 - 1) u + (1 - 0.5\lambda_1) \right] X$$

A Hamiltoneana H é uma função linear de u.

Admitindo que a biomassa é positiva ($X > 0$), H ser crescente ou decrescente depende apenas do sinal de $\lambda_1 - 1$.

$$H = \left[(\lambda_1 - 1)u + (1 - 0.5\lambda_1) \right] X$$



Neste caso
u_{opt}=0

Intervalo de valores admissíveis para u

Neste cas
u_{opt}=1

$\lambda_1 < 1$

$\lambda_1 > 1$

Como se tem a condição terminal

$$\lambda_1(T) = 0$$

para t próximo de T é, neste período de tempo, $\lambda_1(t) = 0$. Logo, como $\lambda_1(T) < 1$, o controlo óptimo correspondente é:

$$u_{opt}(t) = 0$$

A equação adjunta (neste período, próximo do fim) fica

$$-\dot{\lambda}_1 = (\underbrace{u}_{=0} - 0.5)\lambda_1 + 1 - \underbrace{u}_{=0}$$

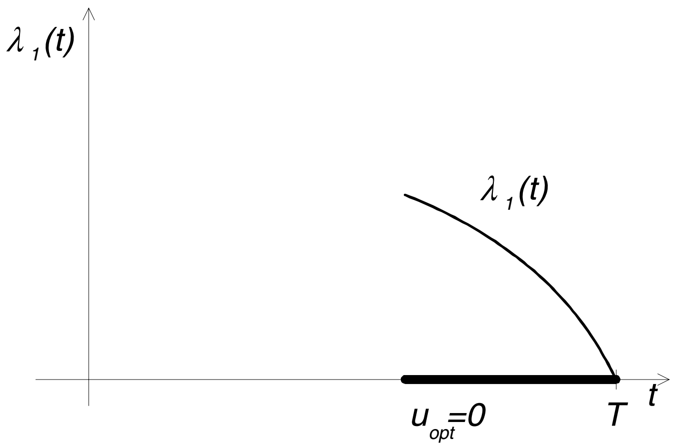
$$\dot{\lambda}_1(t) = 0.5\lambda_1 - 1$$

A equação adjunta próximo do final do intervalo de optimização é

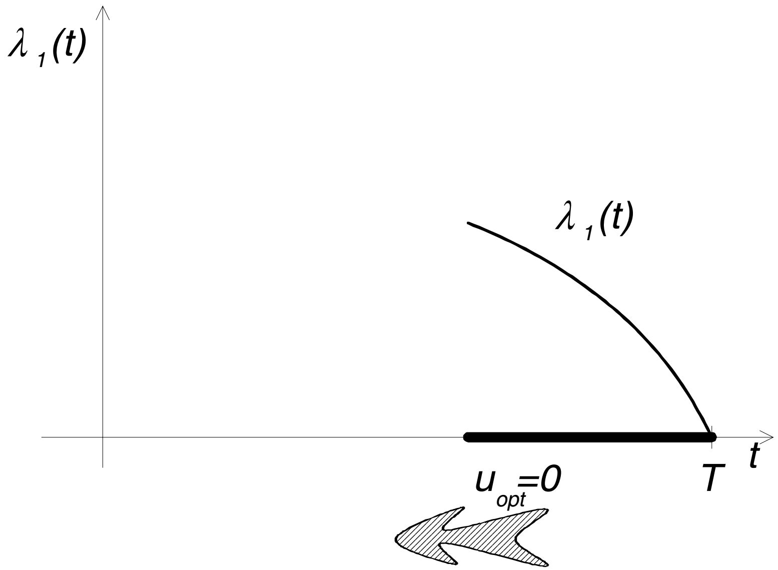
$$\dot{\lambda}_1(t) = 0.5\lambda_1(t) - 1 \qquad \lambda_1(T) = 0$$

Tem por solução

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{0.5}\left(1 - e^{0.5(t-T)}\right)$$



Evolução do coestado e controlo óptimo próximo do fim do intervalo de optimização



"Andando" neste sentido *u* passa a ser 1 no instante t_s em que

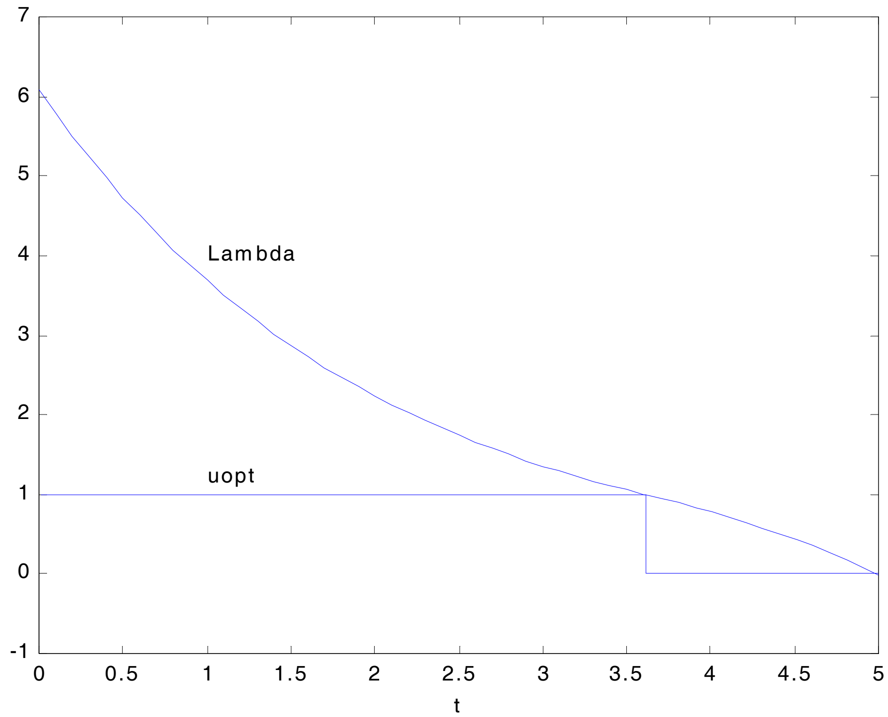
$$\frac{1}{0.5}\left(1-e^{0.5(t_s-T)}\right)=1$$

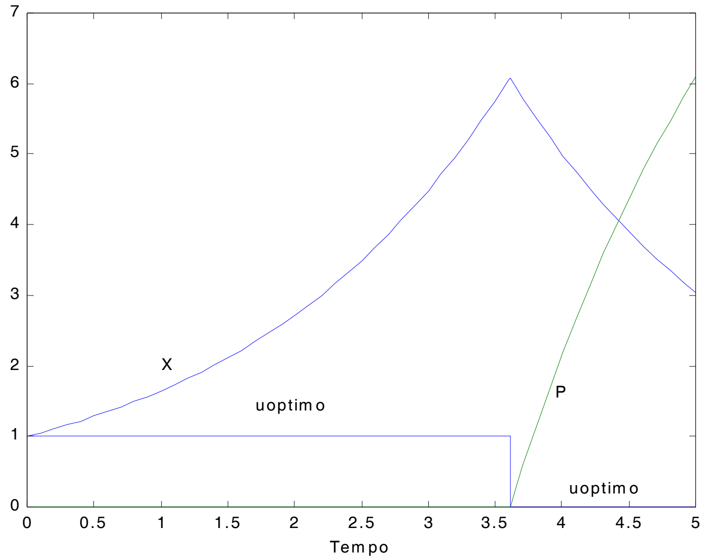
$$e^{0.5(t_s-T)}=0.5$$

$$\log 0.5 = 0.5(t_s-T)$$

$$t_s = T + 2\log o.5 \cong T - 1.39$$

Exemplo para a situação em que *T=5*

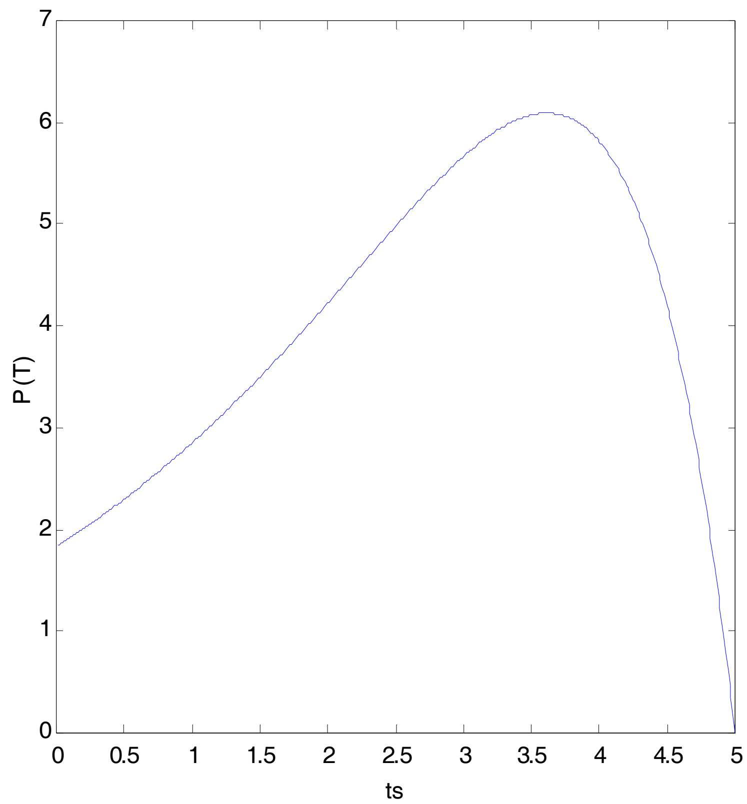




A solução óptima admite a seguinte interpretação: Inicialmente, todo o esforço é para fazer crescer a população de bactérias. Devido ao efeito inibidor do substracto não há produção de penicilina.

A partir do instante de comutação o controlo é escolhido por forma a maximizar a produção de penicilina

É interessante ver que, admitindo a forma "tudo ou nada" da função de controlo, o instante de comutação calculado corresponde de facto a um máximo. Repare-se que o Princípio de Pontryagin nos deu não apenas o instante de comutação, mas também a **forma** da função de controlo óptimo.



- O modelo à partida é muito simplif icado. A utilização de modelos mais realistas (em que as taxas de crescimento dependem, elas próprias, do estado) conduz a um problema de Controlo Óptimo dito "Singular", em que a Hamiltoneana não depende explicitamente de u.
- Num problema real de optimização de fermentadores, T não é à partida fixo, mas deve resultar da optimização. is to conduz aos problemas de tempo terminal livre.
- A existência de um modelo é crítica . Em processos de fermentação é muito difícil dispor de bons modelos devido à variabilidade genética das bactérias (a qual é encorajada para aumentar a produção).

Embora baseado num modelo muito simples, este exemplo ilustra alguns aspectos importantes:

- A maneira *backwards* (do fim para o princípio) de integrar as equações do co-estado
- A solução *bang-bang* (tudo ou nada) do controlo óptimo, que implica a existência de restrições
- A aplicabilidade do método a problemas industriais e Bio-Engenharia

5.Problemas com restrições no estado terminal

Objectivo:

Generalizar o Princípio do Máximo de Pontryagin para problemas com restrições de igualdade no estado terminal. Introduzir a equação de Euler-Lagrange a propósito da solução do problema do Braquistocróno.

Princípio de Pontryagin - Formulação do Problema com restrições de igualdade no estado terminal

Sendo *x* o estado do sistema com entrada *u*, que satisfaz a equação de estado seguinte ***T*** *fixo* $\dot{x} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0,T] \quad u(t) \in U$

pretende-se determinar a função u, definida no intervalo $[0,T]$ que maximiza o funcional de custo *J* definido por

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

sujeita às restrições no valor terminal do estado

$$x_i(T) = \bar{x}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r \leq n$$

Recorde-se a expressão para a variação do funcional de custo

$$\delta\bar{J} = \left[\Psi_x\left(x(T)\right) - \lambda'(T)\right]\delta x(T) + \int_0^T \left[H_x\left(\lambda, x, u\right) + \dot{\lambda}'\right]\delta x dt + \int_0^T \left[H\left(\lambda, x, v\right) - H\left(\lambda, x, u\right)\right]dt$$

A variação é zero para as componentes

especificadas $x_i(T) = \bar{x}_i \quad i = 1, 2, \ldots, r$

Para estas componentes, não existem assim condições terminais no co-estado ou seja $\lambda_i(T)\ i = 1, 2, \ldots, r$ são **livres**.

Princípio de Pontriagyn (problemas com restrições no estado final)

Ao longo da trajectória óptima para *x*, *u* e λ verificam-se as seguintes condições necessárias para a maximização de *J*:

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in [0, T] \;\; u(t) \in U$$

$$x_i(T) = \bar{x}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r \leq n$$

$$-\dot{\lambda}'(t) = \lambda'(t) f_x\big(x(t), u(t)\big) + L_x\big(x(t), u(t)\big)$$

$$\lambda_i'(T) = \Psi_x\big(x(T)\big)_i \qquad i = r+1, r+2, \ldots, n$$

Para cada *t*, a hamiltonia *H,* definida por $H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x, u) + L(x, u)$

é **máxima** para o valor óptimo de *u(t)*.

6.Problemas de tempo terminal livre e Controlo Bang-bang

Objectivo:

Mostrar num caso simples como se pode usar o Princípio do Máximo de Pontryagin para problemas com tempo terminal livre numa situação simples.

Em geral, nos problemas de tempo terminal livre existe a condição adicional:

$$H\big(\lambda(T), x(T), u(T)\big) = 0$$

No problema que se vai considerar a seguir, no entanto, esta condição não é usada. Recorre-se à estrutura do controlo óptimo dada pelo Princípio de Pontryagin.

Dado que o controlo óptimo é dado pela comutação entre valores máximos e mínimos da variável manipulada, diz-se que a estratégia óptima é do tipo "bang-bang".

Exemplo: Carro de empurar

Problema: Dado o carro com equações da dinâmica

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

determinar o controlo óptimo que satisfaz a restrição $|u(t)| \leq 1$ e que leva o estado de uma condição inicial $[x_1(0) \quad x_2(0)]'$ à origem $[0 \quad 0]'$ em tempo mínimo.

Repare-se que o funcional de custo se pode escrever

$$J = \int_0^T dt$$

T livre

Uma vez que o estado terminal é completamente fixado, não existem restrições a impôr ao co-estado. O co-estado será pois conhecido a menos de constantes. A equação do co-estado é:

$$-\dot{\lambda}'(t) = \lambda'(t)\, f_x\big(x(t), u(t)\big) + L_x\big(x(t), u(t)\big)$$

Como $L = 1$, a sua derivada (vector) em ordem ao estado é nula: $L_x = 0$

Como $f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$ a matriz Jacobiana é $f_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$-\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 & \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1 & \dot{\lambda}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

As equações verificadas pelo co-estado são assim:

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$$

Estas equações têm por solução

$$\lambda_1(t) = \pi_1$$
$$\lambda_2(t) = \pi_2 - \pi_1(t)$$

π_1, π_2 constantes desconhecidas

A Hamiltoneana $H = \lambda' f + L$ é neste caso

$$H(\lambda, x, u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

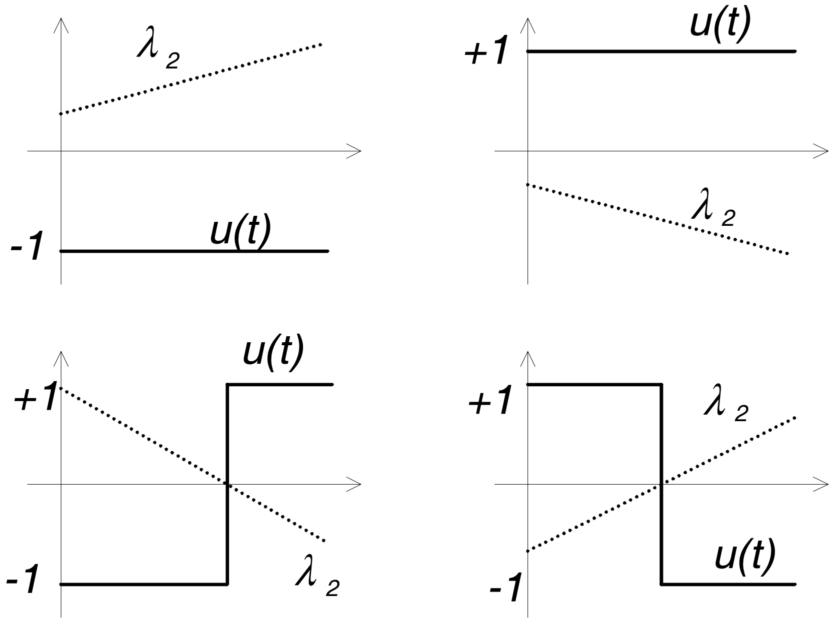
Sendo a Hamiltoniana linear em u, o controlo óptimo é atingido no máximo e no mínimo dos valores admissíveis para u, que são -1 e +1.

Repare-se que neste caso se pretende **minimizar** a Hamiltoniana.

Para que a Hamiltoniana seja mínima:

- Quando $\lambda_2 > 0$ o controlo óptimo é $u_{opt} = -1$
- Quando $\lambda_2 < 0$ o controlo óptimo é $u_{opt} = +1$

Têm-se as seguintes possibilidades:



Repare-se que, sendo $\lambda_2(t)$ uma recta, $\lambda_2(t) = \pi_2 - \pi_1 t$, o controlo óptimo tem **no máximo uma comutação**.

Como determinar os instantes de comutação?

Integrem-se as equações num intervalo de tempo em que o controlo u é constante. Obtém-se:

$$x_2(t) = x_2(0) + ut$$

$$x_1(t) = x_1(0) + x_2(0)t + \frac{1}{2}ut^2$$

Por forma a obter a evolução no plano de estado, elimine-se t entre estas duas equações. Da primeira:

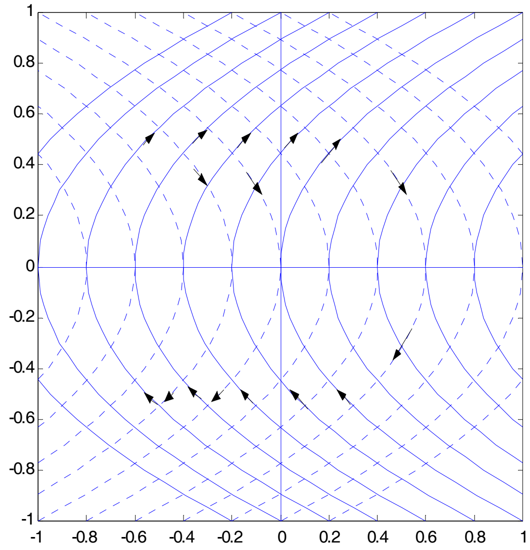
$$t = u\left(x_2(t) - x_2(0)\right)$$

Substituindo na segunda equação:

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{1}{2}ux_2^2(t) - \frac{1}{2}ux_2^2(0)$$

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{1}{2}ux_2^2(t) - \frac{1}{2}ux_2^2(0)$$

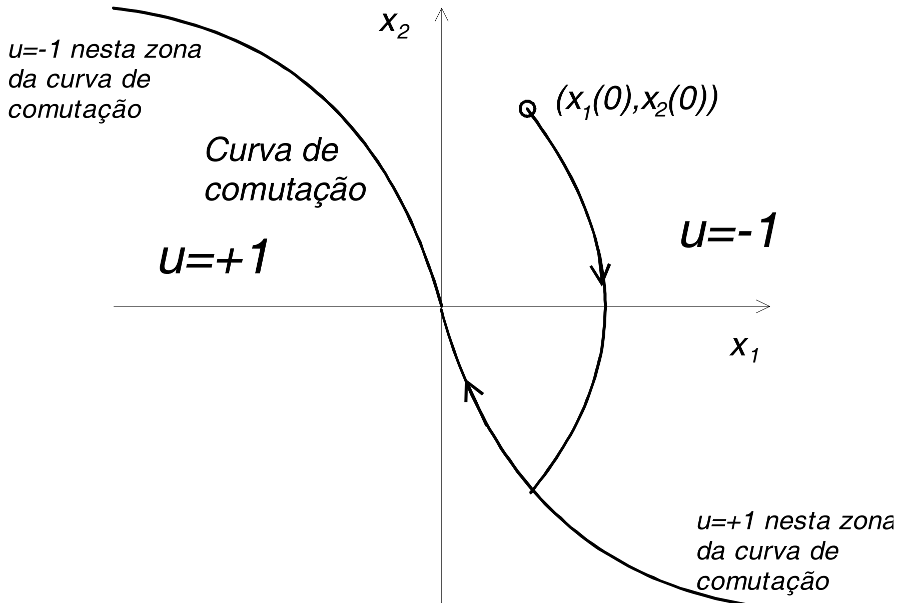
As trajectórias no plano de estado são parábolas de eixo horizontal, com a concavidade virada para a esquerda se $u = -1$ e virada para a direita se $u = 1$.



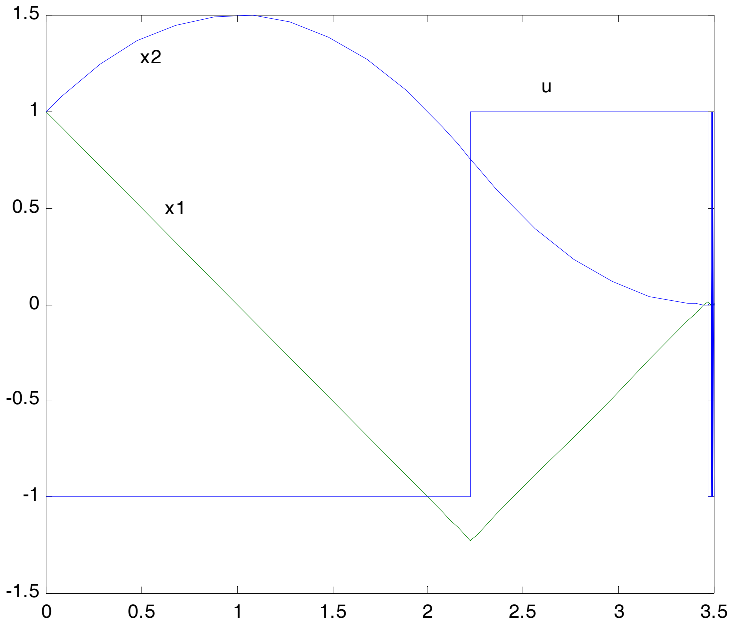
____ *u=+1*

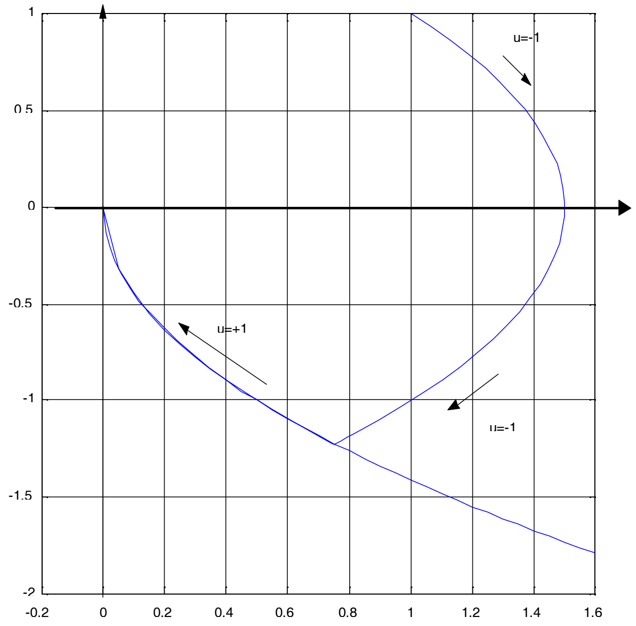
----- *u=-1*

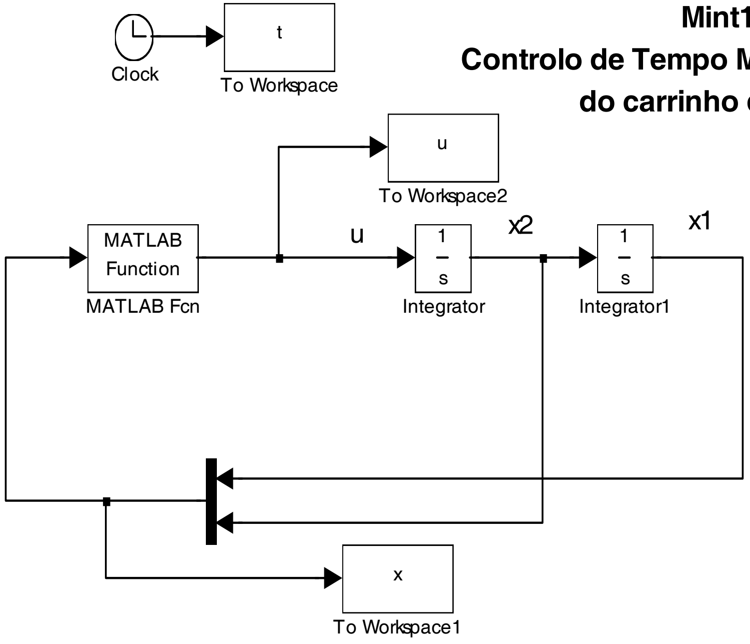
Como só pode haver uma comutação no controlo óptimo, isso conduz a uma regra simples para a escolha do controlo consoante a região do espaço de estados em que nos encontramos: Acima da curva de comutação o controlo é -1. Abaixo é +1. Quando nos encontramos



sobre a curva de comutação, no ramo superior o controlo é -1 e abaixo é +1. Deste modo consegue atingir-se a origem apenas com uma comutação do valor do controlo.


x2
u
x1
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5


u=-1
u=+1
u=-1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6



Mint1.mdl

Controlo de Tempo Mínimo para a origem do carrinho de empurrar

```
function out=comuta(u)
% Calcula o controlo óptimo para o
% problema de tempo
% mínimo para a origem do
% carrinho de empurrar
if u(1)<0
  if u(2)>sqrt(-2*u(1))
    out=-1;
  else
    out=+1;
  end;
else
  if u(2)>-sqrt(2*u(1))
    out=-1;
  else
    out=+1;
  end;
end;
```