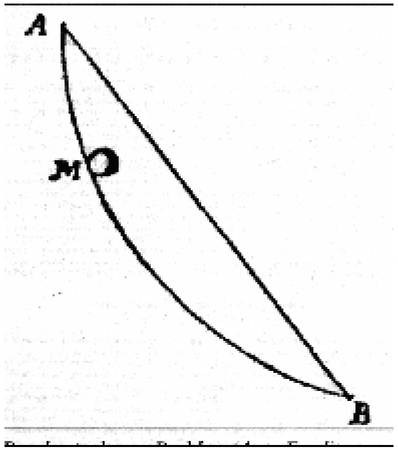
Introdução ao Controlo Óptimo



J. Miranda Lemos

Professor Catedrático do IST

2001

Plano

1. Introdução aos problemas de Controlo Óptimo
2. O Princípio do Máximo de Pontriagyn
3. Justificação do Princípio de Pontriagyn
4. Optimização de um fermentador
5. Problemas com restrições no estado terminal
6. Problemas de tempo terminal livre. Controlo bang-bang
7. O problema Linear Quadrático
8. Programação Dinâmica

Bibliografia

Luenberger, D. (1979). *Introduction to Dynamic Models - Theory, Models and Applications*. Wiley.

Lewis, F. e V. Syrmos (1995). *Optimal Control*. 2ª ed. John Wiley & sons.

Bryson A. e Ho (1975). *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corporation.

1.Introdução aos problemas de Controlo Óptimo

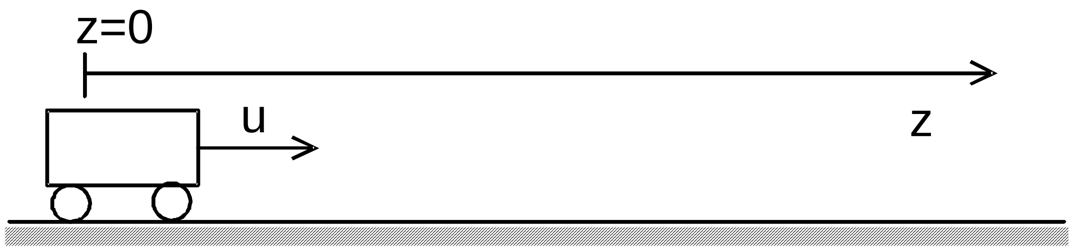
Objectivo:

Introduzir a formulação dos problemas de Controlo Óptimo e mostrar que se está face a problemas que os métodos de optimização estudados na Análise elementar não resolvem

Exemplo: Carro de empurrar

Pretende-se acelerar um carro de modo a maximizar a distância total percorrida num intervalo de tempo fixo *T* menos o esforço total medido por

$$Esforço = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$



Qual deve ser a função

$$u(t) \qquad 0 \leq t \leq T \qquad ?$$

Formulação matemática do problema

Dinâmica do carro (assume-se massa=1):

A dinâmica do carro impõe uma restrição

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = u$$

Objectivo: Escolher a função

$$u(t) \qquad 0 \le t \le T$$

que maximiza

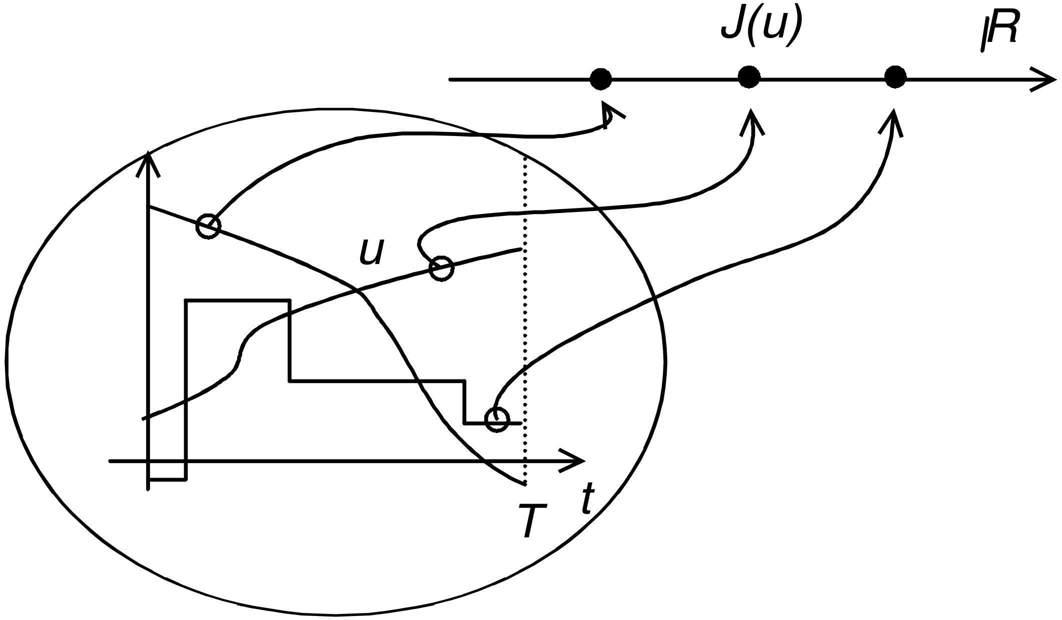
$$J(u) = z(T) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)dt$$

Espaço total percorrido

Esforço dispendido

J é uma "função" que transforma funções em números reais

O **funcional** *J* faz corresponder a cada elemento do espaço das funções seccionalmente contínuas no intervalo $[0, T]$ um número real.

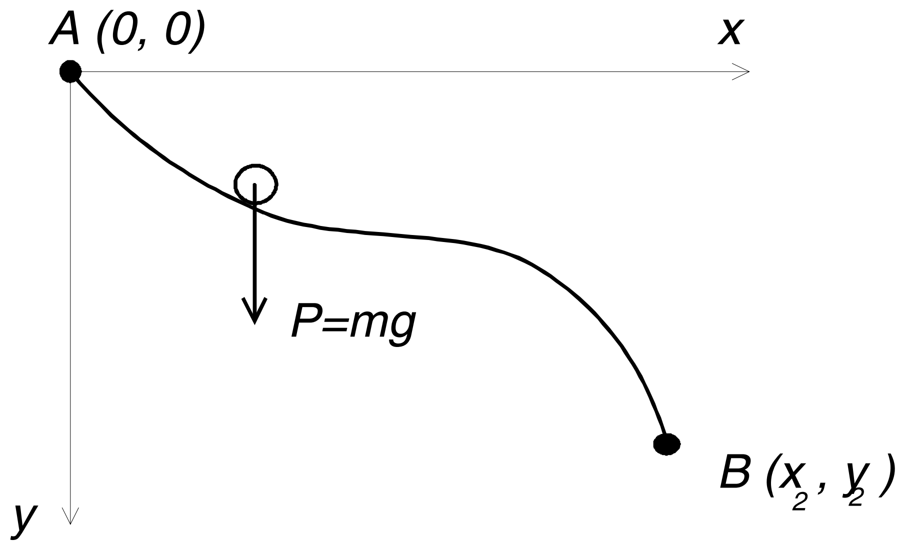


Repare-se que **não** podemos encontrar a função *u* que máximiza *J* resolvendo a equação $\frac{dJ}{du} = 0$ porque *u* é uma função e existe num espaço de dimensão infinita

Consoante a "forma" da função, assim o valor de *J* correspondente.

Um problema clássico: O Braquistocróno

Qual a forma da curva que liga os pontos A e B de tal forma que um ponto material, abandonado à acção da gravidade, deslize (sem atrito) de A para B em tempo mínimo?



Qual a função *y(x)* que minimiza o tempo de percurso entre A e B?

Cálculo do tempo de percurso conhecendo $y(x) \quad 0 \le x \le x_2$

Não havendo atrito, em cada ponto a energia cinética é igual à perda de energia potencial pelo que $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ ou seja:

$$v(x) = \sqrt{2gy(x)}$$

mas, sendo *s* o comprimento de arco,

$$v(x) = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.\frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}.\frac{dx}{dt}$$

Da conservação de energia:

$$v(x) = \sqrt{2gy(x)}$$

Da cinemática:

$$v(x) = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,.\frac{dx}{dt}$$

Combinando as duas expressões:

$$\sqrt{2gy(x)} = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,.\frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{2gy(x)} = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,.\frac{dx}{dt}$$

ou seja

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1+\left(y'(x)\right)^2}{2gy(x)}}$$

O tempo de percurso obtém-se por integração

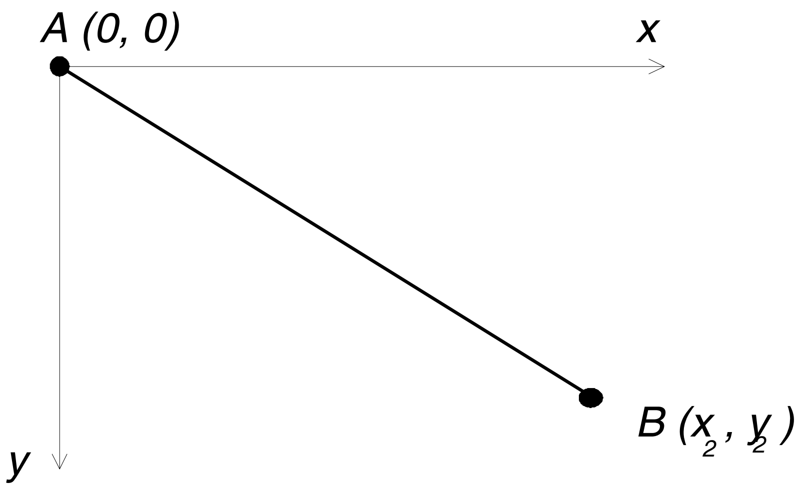
$$T = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+\left(y'(x)\right)^2}{2gy(x)}}dx$$

Se conhecermos a função *y(x)*, podemos determinar o tempo de percurso através de

$$T = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+\left(y'(x)\right)^2}{2gy(x)}}dx$$

Por exemplo, se o trajecto fôr um segmento de recta entre os pontos A e B,

$y(x) = \alpha x$ com $\alpha = {y_2}/{x_2}$



O tempo de percurso através de um trajecto rectilíneo é, portanto:

$$T=\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+\left(y'(x)\right)^2}{2gy(x)}}dx=\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2g\alpha}}.x^{-1/2}dx=\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2g\alpha}}.2x_2^{1/2}$$

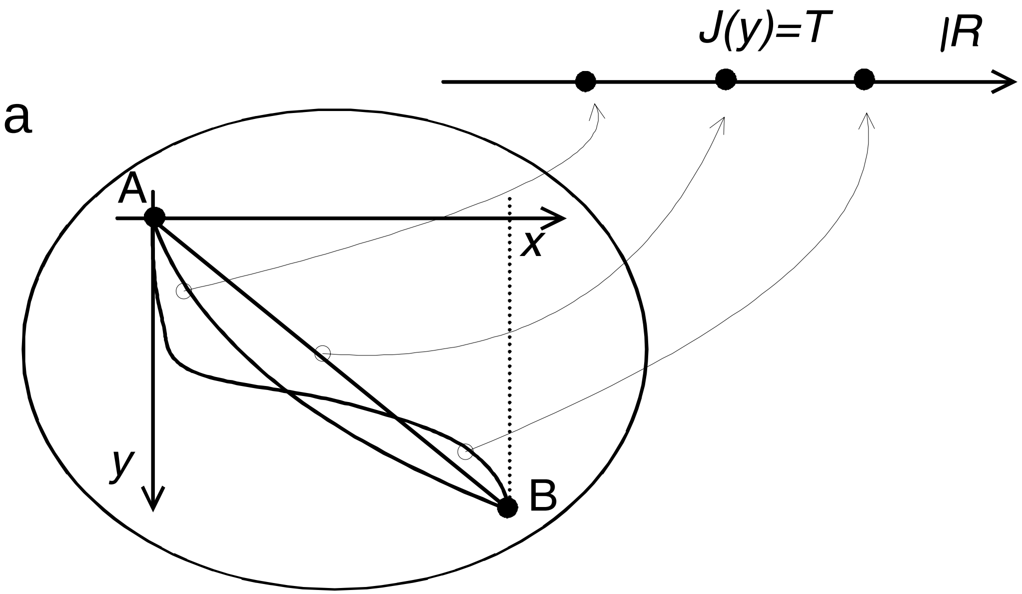
Se quisessemos comparar com o tempo correspondente a outra curva (por exemplo um arco de circunferência), podemos fazê-lo e decidir qual das duas curvas corresponde a um trajecto mais rápido.

A expressão

$$T = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1+\left(y'(x)\right)^2}{2gy(x)}}dx$$

define o nosso funcional.

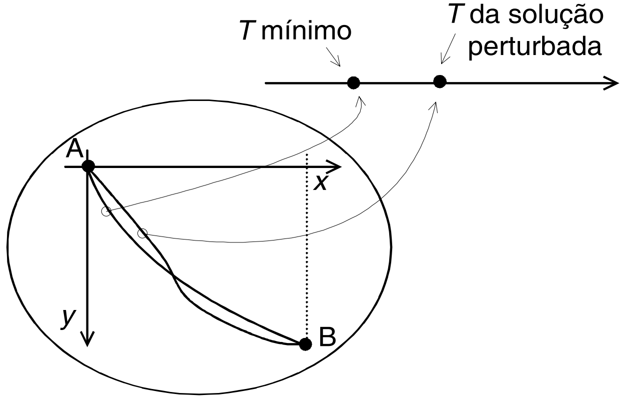
A cada função derivável $y(x)$ definida no intervalo $[0, x_2]$ e que respeita as condições fronteiras $y(0) = 0$ e $y(x_2) = y_2$ faz correspopnder um número real (o tempo de percurso).



A questão é que não podemos examinar exaustivamente todas as hipóteses (porque há infinitas possibilidades).

É necessária uma **nova ferramenta matemática** para lidar com estes problemas de optimização.

Uma ideia consiste em usar um **método de variação**: A solução de tempo mínimo para a função *y* é tal que qualquer variação leva a um tempo de percurso maior.



O problema pode ser formulado como um problema de controlo, definindo a variável manipulada *u* como $u = \frac{dy}{dx}$. Tem-se:

Minimizar:

$$T = \int_0^{x_2} \sqrt{\frac{1 + u(x)^2}{2gy(x)}} dx$$

sendo a "dinâmica do sistema"

$$\frac{dy}{dx} = u$$

sujeito às condições fronteira

$$y(0) = 0 \quad y(x_2) = y_2$$

O problema do Braquistocróno foi publicado em 1 de Janeiro de 1667 por **Johann Bernouilli** como um desafio à comunidade científica. *Nada é mais atractivo para as pessoas inteligentes do que um honesto problema que as desafie e cuja solução traga fama e permaneça como um monumento duradouro,* escrevia ele.

Galileo sabia já, 60 anos antes, que o trajecto de tempo mínimo não podia ser uma recta, embora pensasse, erroneamente, que era um arco de circunferência.

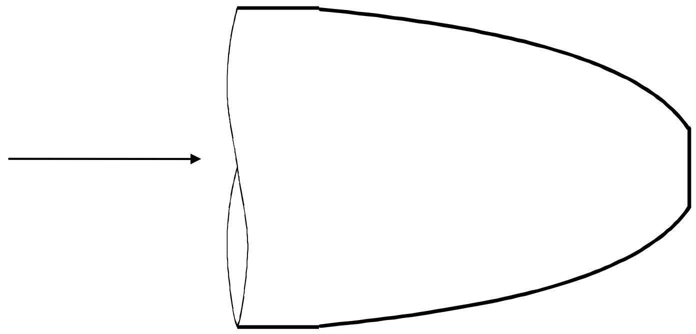
Ao desafio de Johann Bernouilli corresponderam seis dos espíritos mais brilhantes da época: O seu irmão mais velho Jacob, Leibniz, Tschirnhaus, l'Hopital e Newton (que publicou a solução anonimamente e sobre a qual Leibniz disse a célebre frase "reconheço o leão pelas suas garras".

Uma perspectiva histórica do problema do Braquistocróno e das suas relações com o Controlo Óptimo pode ser vista em

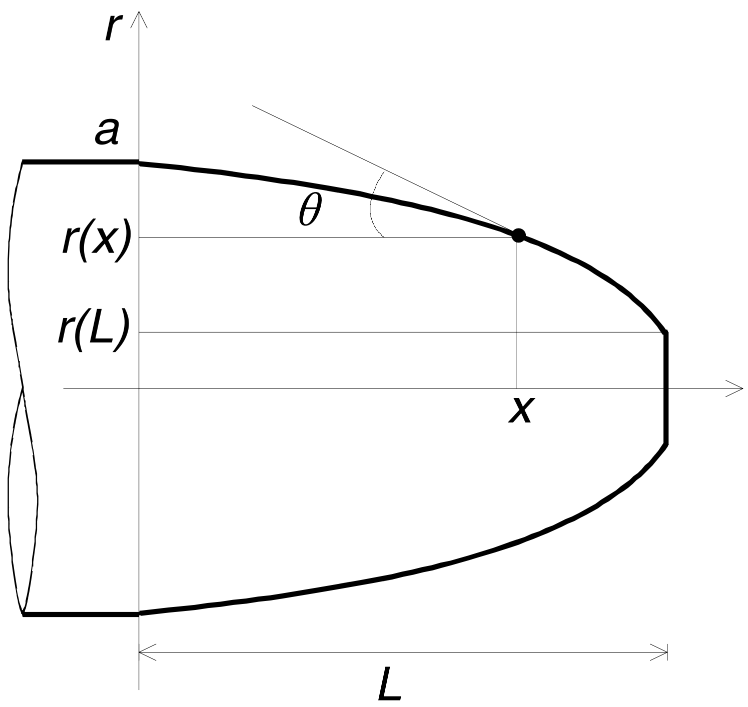
Sussmann, H. J. e J. C. Willems (1997). 300 Years of Optimal Control: From the Brachystochrone to the Maximum Principle. *IEEE Control Systems*, 17(3):32-44.

Força de arrasto mínima

Qual a forma de uma ogiva com força de arrasto mínima?



Este problema foi resolvido por Newton em 1686 (dez anos antes do desafio de Johann Bernouilli sobre o braquistocróno). Newton pensava em aplicações em navios, mas o modelo que usou para a força de arrasto (que é o que aqui se considera) é apenas válido para fluidos rarefeitos a velocidades hipersónicas.



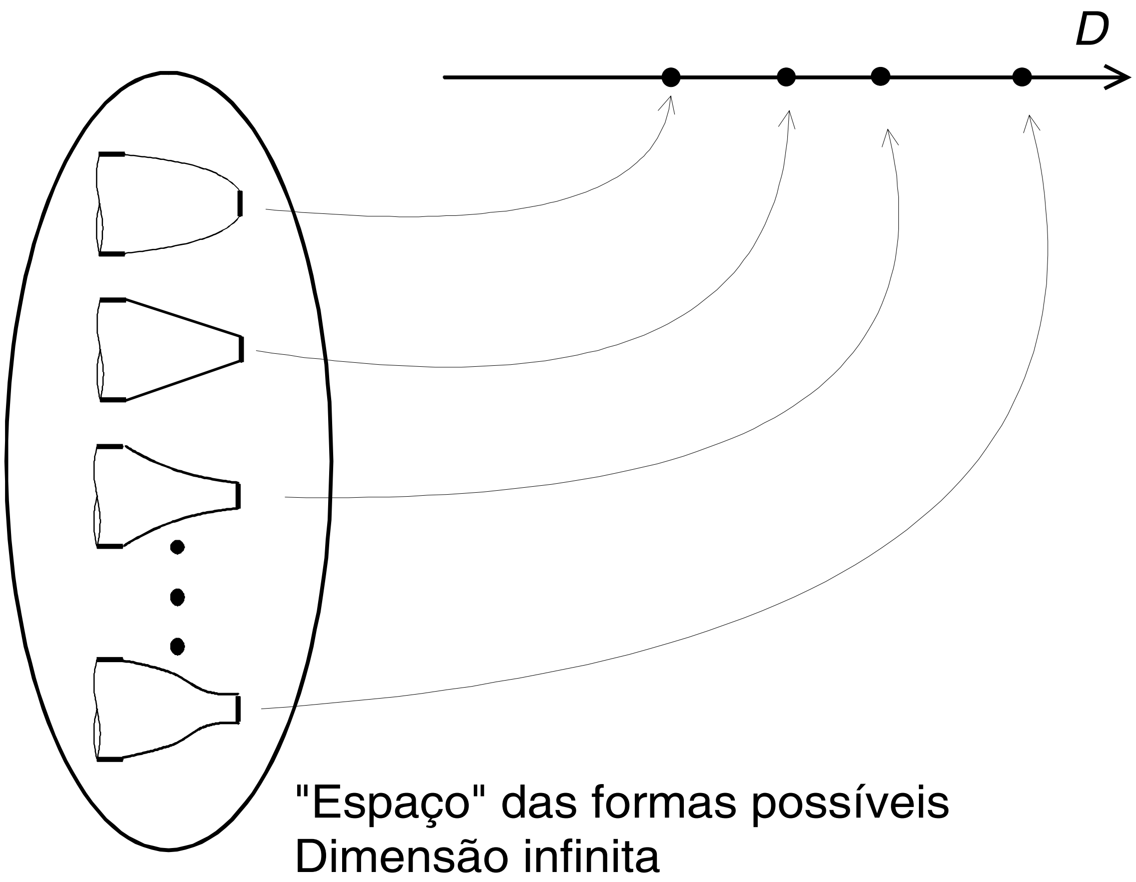
A velocidades hipersónicas a força de arrasto *D* vem dada aproximadamente por

$$D = -2\pi q \int_{x=0}^{x=L} C_p(\theta) r dr$$

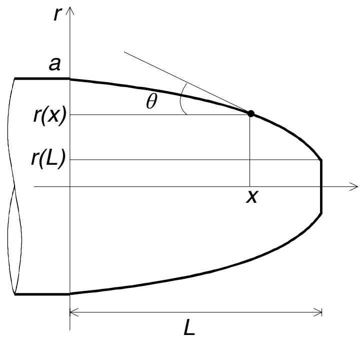
em que q é a pressão dinâmica suposta constante e

$$C_p = \begin{cases} 2\sin^2\theta & para \quad \theta \geq 0 \\ 0 & para \quad \theta \leq 0 \end{cases}$$

A cada forma da ogiva corresponde uma força de arrasto.



$$D = -2\pi g \int_{x=0}^{x=L} 2\sin^2\theta r dr$$



Pode ser formulado como um problema de Controlo Óptimo:

Minimizar:

$$\frac{D}{4\pi q} = \frac{1}{2}\left[r(L)\right]^2 + \int_0^L \frac{ru^3}{1+u^2}dx$$

sujeito à restrição imposta pela "dinâmica"

$$\frac{dr}{dx} = u$$