

5. Predição Linear e Controlo de Variância Mínima

***Objectivo:** Projectar controladores discretos lineares para sistemas com perturbações estocásticas. Preparação para o Controlo Adaptativo.*

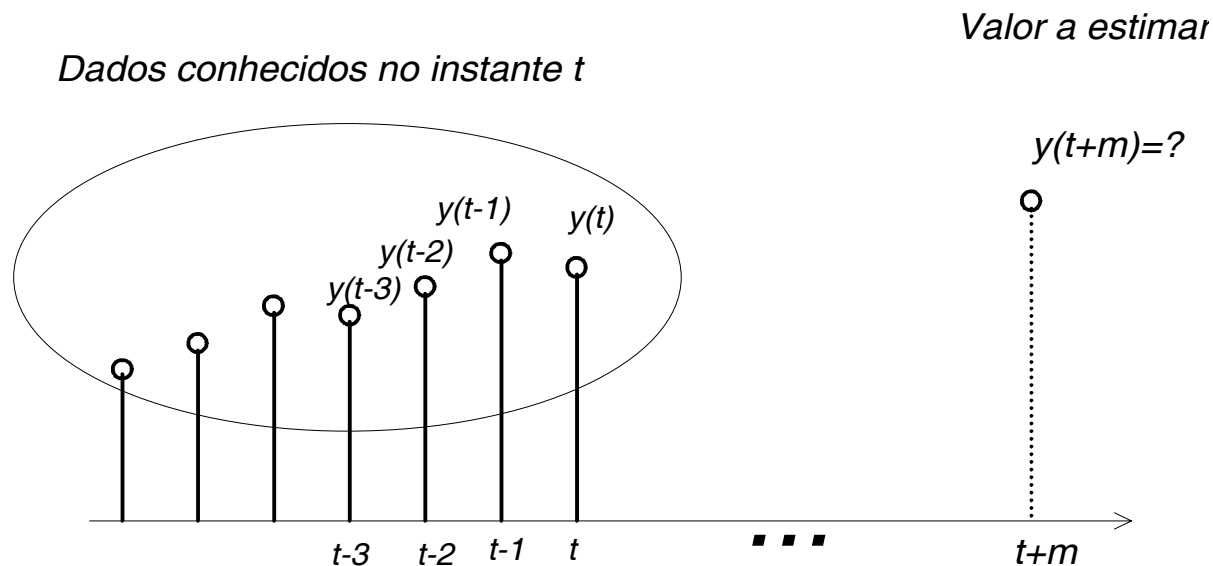
Referência: AW, Cap. 12, secs. 12.1 a 12.4

O problema da predição

Observa-se uma série temporal de números:

$$y(0), y(2), y(3), \dots, y(t)$$

Pretende estimar-se qual o valor que a "série" vai tomar m passos à frente.



O problema da predição tem várias motivações. A mais óbvia (e porventura mais atraente...) é constituída pelas aplicações em Economia e Gestão. Um outro exemplo diz respeito às aplicações em Controlo de sistemas sujeitos a perturbações aleatórias. Este problema foi tratado pela primeira vez por Kolmogorov e Wiener.



A. Kolmogorov (1903-1987)

Personalidades muito diferentes, ambos foram não só notáveis matemáticos que dedicaram a sua atenção aos sistemas estocásticos, mas também tiveram um amplo leque de interesses em áreas diversificadas.



N. Wiener (1894-1964)

A resolução do problema da predição pressupõe:

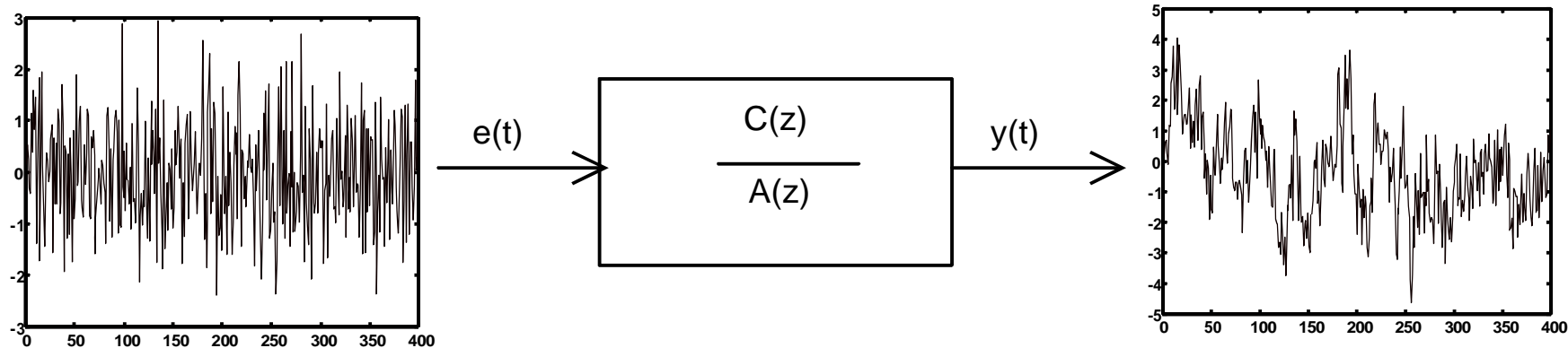
- A existência de um **modelo** sobre o modo como os dados são gerados;
- Um **critério** que permita avaliar a qualidade da predição e escolher a melhor.

Iremos considerar como classe de modelos sinais aleatórios obtidos pela passagem de ruído branco por sistemas lineares e invariantes no tempo.

Como critério ir-se-á utilizar o erro quadrático médio de estimação.

O modelo ARMA

O sinal estacionário $y(t)$ é modelado como o resultado da passagem de ruído branco através do sistema linear $C(z) / A(z)$:



A este modelo dá-se o nome de ARMA (Auto-Regressivo, de Média Móvel).

O modelo ARMA no operador atraso

Polinómio recíproco

$$A^*(q^{-1}) = q^{-n} A(q)$$

$$A^*(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i q^{-i}$$

Multiplicando o modelo ARMA por q^{-n} :

$$\underbrace{q^{-n} A(q)}_{A^*(q^{-1})} y(t) = \underbrace{q^{-n} C(q)}_{C^*(q^{-1})} e(t)$$

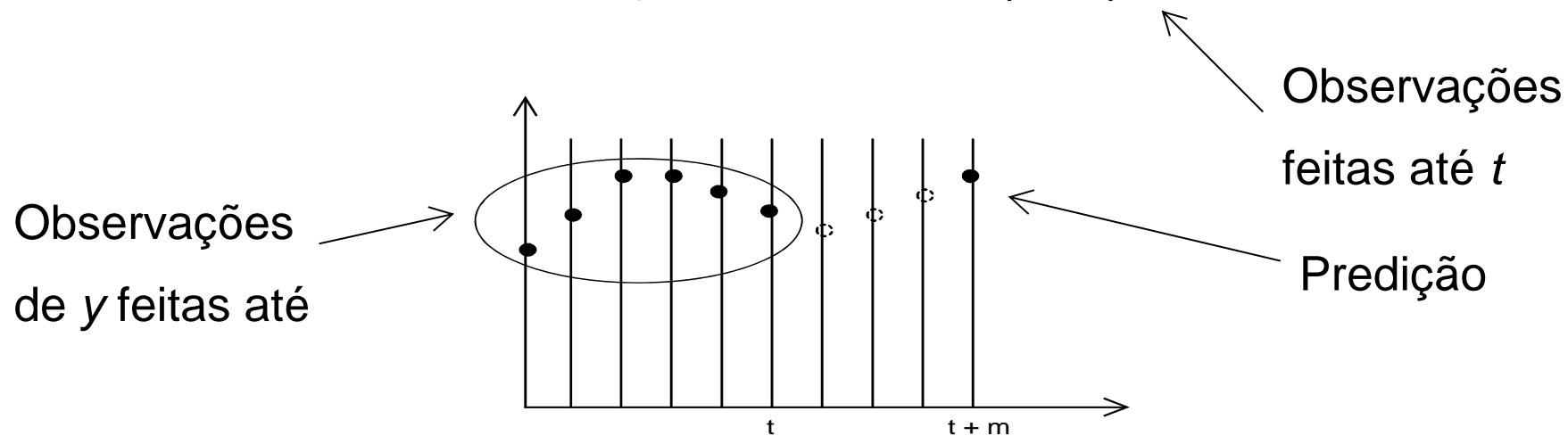
O modelo ARMA no operador atraso unitário é

$$A^*(q^{-1}) y(t) = C^*(q^{-1}) e(t)$$

O problema de predição com custo de erro quadrático médio

Determinar $\hat{y}(t+m|t), m \geq 1$ que depende apenas das observações de y feitas até ao instante t , que minimiza a variância em regime estacionário do erro de predição:

$$E [(y(t+m) - \hat{y}(t+m|t))^2 | O^t]$$



Solução do problema de predição

$$y(t + m) = \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t + m)$$

Expande-se C^* / A^* por divisão longa

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = \underbrace{1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{m-1} q^{-m+1}}_{F_m^*(q^{-1})} + \underbrace{f_m q^{-m} + f_{m-1} q^{-m-1} + \dots}_{q^{-m} \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}}$$

$$F_m^*(q^{-1})$$

$$q^{-m} \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

$$y(t + m) = \underbrace{e(t + m) + f_1 e(t + m - 1) + \dots + f_{m-1} e(t + 1)}_{\varepsilon_m(t)} + \underbrace{f_m e(t) + f_{m+1} e(t - 1) + \dots}_{\text{Depende do ruído até ao instante } t}$$

$\varepsilon_m(t)$ Depende apenas das amostras do ruído futuras

Depende do ruído até ao instante t

A equação

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = F_m^*(q^{-1}) + q^{-m} \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

permite a separação dos termos que afectam $y(t+m)$ em duas parcelas:

- A parcela dos termos que já ocorreram até ao instante t ;
- A parcela $\varepsilon_m(t)$ dos termos que ocorre de $t+1$ para diante

$$y(t+m) = F_m^*(q^{-1}) + \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) = \varepsilon_m(t) + \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t)$$

Repare-se que a média do produto destas duas parcelas é zero (porquê?).

Para obter a expressão do preditor ótimo, considere-se o custo:

$$J = E\left[(y(t+m) - \hat{y}(t+m|t))^2 | O^t\right]$$

Tendo em conta a expressão obtida anteriormente:

$$J = E\left[\underbrace{\left(\frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) - \hat{y}(t+m|t)\right)^2}_A + \underbrace{\varepsilon_m^2(t)}_B \mid O^t\right]$$

As parcelas A e B são independentes e de média nula, pelo que a média do seu produto é zero. Assim:

$$J = E\left[\left(\frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) - \hat{y}(t+m|t)\right)^2 \mid O^t\right] + E\left[\varepsilon_m^2(t) \mid O^t\right]$$

$$J = E \left[\left(\frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) - \hat{y}(t+m|t) \right)^2 \middle| O^t \right] + E \left[\varepsilon_m^2(t) \middle| O^t \right]$$

Tendo em conta a média condicionada, obtém-se (porquê?)

$$J = \left(\frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) - \hat{y}(t+m|t) \right)^2 + E \left[\varepsilon_m^2(t) \right]$$

Este termo é mínimo quando se anula

Este termo não depende de
 $\hat{y}(t+m|t)$

O preditor ótimo é portanto

$$\hat{y}(t+m|t) = \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t)$$

O preditor ótimo é assim dado por

$$\hat{y}(t + m|t) = \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t)$$

Esta expressão não é útil pois exprime o preditor no sinal $\{e\}$ que não é mensurável directamente. No entanto, como os polinómios A e C têm o mesmo grau, tem-se

$$e(t) = \frac{A^*(t)}{C^*(t)} y(t)$$

Pelo que o preditor ótimo em regime estacionário se escreve

$$\hat{y}(t + m|t) = \frac{G_m^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} y(t)$$

Preditor de erro quadrático médio mínimo para sinais ARMA

Dado o modelo ARMA

$$y(t) = \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} e(t) \quad \text{com} \quad E[e^2(t)] = \sigma_e^2$$

o preditor ótimo m passos à frente vem dado por

$$\hat{y}(t+m|t) = \frac{G_m^*(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} y(t)$$

em que

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = F_m^*(q^{-1}) + q^{-m} \frac{G_m^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

sendo $F_m^*(q^{-1})$ um polinómio de grau $m-1$.

A variância do erro de predição é

$$E[\varepsilon_m^2(t)] = E[(e(t+m) + f_1 e(t+m-1) + \dots + f_{m-1} e(t+1))^2]$$

Dado que $\{e\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e de média nula, ao desenvolver-se o quadrado, os termos cruzados anulam-se, e:

$$E[\varepsilon_m^2(t)] = (1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{m-1}^2) \sigma_e^2$$

Predição linear: Exemplo

Determine os preditores 1, 2 e 3 passos à frente do sinal modelado por

$$y(k) = \frac{q^2 - 1.4q + 0.5}{q^2 - 1.2q + 0.4} e(k)$$

em que $\{e\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas, de média nula e variância unitária. Determine o desvio padrão das estimativas.

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = \frac{1 - 1.4q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2}}$$

$$\begin{array}{r} 1 - 1.4q^{-1} + 0.5q^{-2} \\ 1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2} \\ \hline -0.2q^{-1} + 0.1q^{-2} \\ -0.2q^{-1} + 0.24q^{-2} - 0.08q^{-3} \\ \hline -0.14q^{-2} + 0.08q^{-3} \\ -0.14q^{-2} + 0.168q^{-3} - 0.056q^{-4} \\ \hline -0.088q^{-3} + 0.056q^{-4} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2} \\ \hline 1 - 0.2q^{-1} - 0.14q^{-2} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 -0.16q^{-3} + 0.056q^{-4} \\
 1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2} \\
 \hline
 \boxed{-0.2q^{-1} + 0.1q^{-2}} \\
 -0.2q^{-1} + 0.24q^{-2} - 0.08q^{-3} \\
 \hline
 \boxed{-0.14q^{-2} + 0.08q^{-3}} \\
 -0.14q^{-2} + 0.168q^{-3} - 0.056q^{-4} \\
 \hline
 \boxed{-0.088q^{-3} + 0.056q^{-4}}
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 q^{-1}G_1^*(q^{-1}) \\
 q^{-2}G_2^*(q^{-1}) \\
 q^{-3}G_3^*(q^{-1})
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \boxed{1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2}} \\
 \hline
 1 - 0.2q^{-1} - 0.14q^{-2}
 \end{array}$$

Preditor 1 passo à frente:

$$\hat{y}(t+1|t) = \frac{-0.2 + 0.1q^{-1}}{1 - 1.4q^{-1} + 0.5q^{-2}} y(t)$$

$$\hat{y}(t+1|t) = 1.4\hat{y}(t|t-1) - 0.5\hat{y}(t-1|t-2) - 0.2y(t) + 0.1y(t-1)$$

Variância do erro de predição 1 passo à frente

$$\sigma_1 = 1$$

Preditor 2 passos à frente:

$$\hat{y}(t+2|t) = \frac{-0.14 + 0.08q^{-1}}{1 - 1.4q^{-1} + 0.5q^{-2}} y(t)$$

$$\hat{y}(t+2|t) = 1.4\hat{y}(t+1|t-1) - 0.5\hat{y}(t|t-2) - 0.14y(t) + 0.08y(t-1)$$

Variância do erro de predição 2 passos à frente

$$\sigma_2 = 1 + (-0.2)^2 = 1.04$$

Preditor 3 passos à frente:

$$\hat{y}(t+3|t) = \frac{-0.088 + 0.056q^{-1}}{1 - 1.4q^{-1} + 0.5q^{-2}} y(t)$$

$$\hat{y}(t+3|t) = 1.4\hat{y}(t+2|t-1) - 0.5\hat{y}(t+1|t-2) - 0.088y(t) + 0.056y(t-1)$$

Variância do erro de predição 3 passos à frente

$$\sigma_3 = 1 + (-0.2)^2 + (-0.14)^2 = 1.06$$

Preditores para modelos ARX

$$A(q) y(t) = B(q) u(t) + q^n e(t)$$

$$\partial A - \partial B = 1 \quad \text{“atraso do processo”}$$

$$A^*(q^{-1}) y(t) = B^*(q^{-1}) u(t-1) + e(t)$$

$$A^*(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i q^{-i}$$

$$B^*(q^{-1}) = \sum_{i=0}^m b_i q^{-i}$$

Sejam

$$F_j^*(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_j q^{-j}$$

$$G_j^*(q^{-1}) = g_0^j + g_1^j q^{-1} + \dots + g_{n-1}^j q^{-n+1}$$

que verificam

$$1 = F_j^*(q^{-1}) A^*(q^{-1}) + q^{-j-1} G_j^*(q^{-1})$$

ou seja

$$F_j^*(q^{-1}) A^*(q^{-1}) = 1 - q^{-j-1} G_j^*(q^{-1})$$

$$A^*(q^{-1}) y(t + j + 1) = B^*(q^{-1}) u(t + j) + e(t + j + 1)$$

Multiplique-se por $F_j^*(q^{-1})$

$$\underline{F_j^*(q^{-1}) A^*(q^{-1}) y(t + j + 1) = F_j^*(q^{-1}) B^*(q^{-1}) u(t + j) + F_j^*(q^{-1}) e(t + j)}$$



$$1 - q^{-j-1} G_j^*(q^{-1})$$

$$y(t + j + 1) = \underline{G_j^*(q^{-1}) y(t) + F_j^*(q^{-1}) B^*(q^{-1}) u(t + j) + F_j^*(q^{-1}) e(t + j)}$$

$$\hat{y}(t + j + 1 | t)$$

$$\hat{y}(t + j + 1 | t) = G_j^*(q^{-1}) y(t) + F_j^*(q^{-1}) B^*(q^{-1}) u(t + j)$$

Parta-se $F_j^* B^*$ por forma a separar as amostras de controlo "livres" (que ocorrem entre t e $t + j - 1$ das que já foram definidas no passado

$$F_j^*(q^{-1}) B^*(q^{-1}) = W_j^*(q^{-1}) + q^{-j-1} H_j^*(q^{-1})$$

$$W_j^*(q^{-1}) = w_1 + w_2 q^{-1} + \dots + w_{j+1} q^{-j}$$

$$H_j^*(q^{-1}) = h_0^j + h_1^j q^{-1} + \dots + h_{m-1}^j q^{-m+1}$$

$$\hat{y}(t + j + 1 | t) = G_j^*(q^{-1}) y(t) + W_j^*(q^{-1}) u(t + j) + H_j^*(q^{-1}) u(t - 1)$$

$$\hat{y}(t + j + 1 | t) = W_j^*(q^{-1}) u(t + j) + G_j^*(q^{-1}) y(t) + H_j^*(q^{-1}) u(t - 1)$$

Combinção linear
de $u(t) \dots u(t+j)$

Combinção linear
de $y(t) y(t-1) \dots y(t-n+1)$

Comb. linear de
 $u(t-1) \dots u(t-m)$

$$\hat{y}(t + j + 1) = \sum_{i=0}^j w_{i+1} u(t + j - i) + \pi'_{j+1} s(t)$$

$$s(t) = [y(t) y(t - 1) \dots y(t - n + 1) u(t - 1) \dots u(t - m)]'$$

Preditor 1 passo à frente

$$\hat{y}(t+1) = w_1 u(t) + \pi_1' s(t)$$

$$s(t) = [y(t) \quad \cdots \quad y(t-n+1) \quad u(t-1) \quad \cdots \quad u(t-m)]$$

A saída do sistema difere do preditor de um termo que é ortogonal aos dados

$$y(t+1) = \hat{y}(t+1) + e(t+1)$$

Preditor 2 passos à frente

$$\hat{y}(t+1) = w_1 u(t+1) + w_2 u(t) + \pi_2' s(t)$$

Controlo de variância mínima de sistemas com inverso estável

Seja dado o sistema ARMAX:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

Admite-se:

$$d = \partial A - \partial B \geq 1 \quad \partial A = \partial B = n$$

e ainda que o polinómio $B(z)$ tem todas as suas raízes dentro do círculo unitário, *i. e.*, o sistema a controlar tem inversa estável.

O funcional de variância mínima

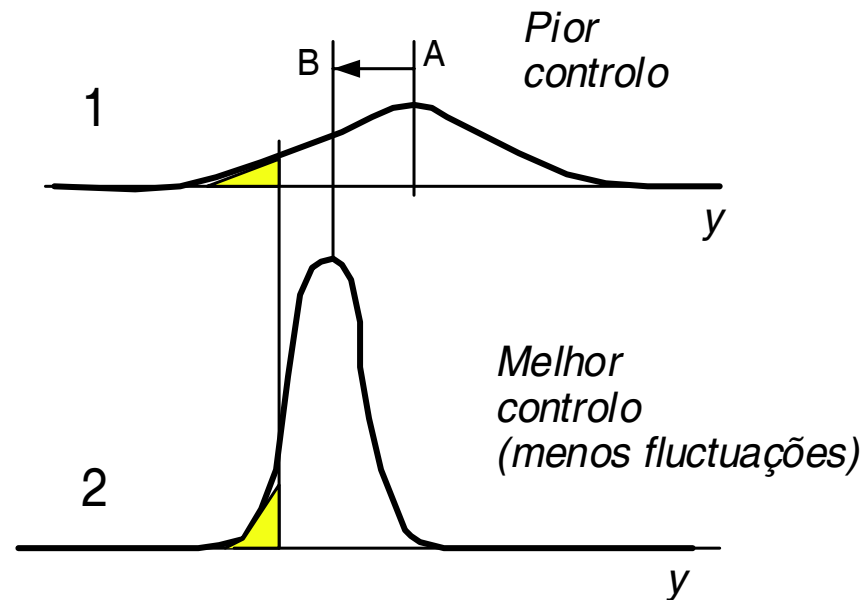
Pretende-se, em cada intervalo de amostragem t determinar $u(t)$ por forma a minizar a variância da saída dadas as observações entrada/saída até t .

$$J(u(t)) = E\left[y^2(t+d) | O^t\right]$$

Queremos regular a saída para zero (nível de referência), rejeitando perturbações que são modeladas estocasticamente.

No instante t , em que escolhemos $u(t)$, apenas podemos influenciar $y(t+d)$ ou a saída em instantes posteriores.

Exemplo: Produção de papel



A redução nas flutuações da saída (gramagem do papel) permite baixar o valor da referência e poupar matéria prima.

Solução do problema de Controlo de Variância Mínima

No operador atraso, o sistema é representado pelo modelo

$$A^*(q^{-1})y(t+d) = B^*(q^{-1})u(t) + C^*(q^{-1})e(t+d)$$

Sejam $F_d^*(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_{d-1}q^{-d+1}$

e $G_d^*(q^{-1})$ de grau $n-1$ tais que

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = F_d^*(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G_d^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

ou seja $A^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - q^{-d}G_d^*(q^{-1})$

Multiplique-se o modelo por $F_d^*(q^{-1})$:

$$A^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})y(t+d) = B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})u(t) + C^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})e(t+d)$$

$$\boxed{A^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - q^{-d}G_d^*(q^{-1})}$$

Obtém-se

$$(C^*(q^{-1}) - q^{-d}G_d^*(q^{-1}))y(t+d) = B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})u(t) + C^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})e(t+d)$$

ou seja

$$y(t+d) = \frac{1}{C^*(q^{-1})} (G_d^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})u(t)) + F_d^*(q^{-1})e(t+d)$$

Repare-se que exprimimos $y(t+d)$ como a soma de duas parcelas incorrelacionadas (a média do seu produto é zero), uma das quais depende dos dados até ao instante t , e outra depende do que "acontece" a partir de $t+1$:

$$y(t + d) = \frac{1}{C^*(q^{-1})} (G_d^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})u(t)) + F_d^*(q^{-1})e(t + d)$$

$\alpha(u(t))$ Esta parcela é o preditor de $y(t+d)$

β

$$y(t + d) = \alpha(u(t)) + \beta$$

Considere-se de novo o custo de variância mínima e substitua-se esta expressão em $y(t+d)$

$$J(u(t)) = E\left[y^2(t+d) | O^t\right]$$
$$\uparrow$$
$$y(t+d) = \alpha(u(t)) + \beta$$

tem-se:

$$J(u(t)) = E\left[(\alpha(u(t)) + \beta)^2 | O^t\right] = E\left[\alpha^2(u(t)) | O^t\right] + E\left[\beta^2 | O^t\right]$$

$$J(u(t)) = \alpha^2(u(t)) + E\left[\beta^2\right]$$

$$J(u(t)) = \alpha^2(u(t)) + E[\beta^2]$$

A segunda parcela não depende de $u(t)$. A primeira é sempre positiva ou nula. O seu valor é mínimo é zero, sendo atingido para o valor de $u(t)$ que satisfaz:

$$\alpha(u(t)) = 0$$

ou seja, o valor óptimo de $u(t)$ verifica, para cada t

$$G_d^*(q^{-1})y(t) + B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})u_{VM}(t) = 0$$

O controlador de variância mínima é portanto

$$u_{VM}(t) = -\frac{G_d^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1})}y(t) = -\frac{G_d(q)}{B(q)F_d(q)}y(t)$$

$$J(u(t)) = \alpha^2(u(t)) + E[\beta^2]$$

O controlo de variância
mínima anula este termo

O valor mínimo do funcional J que se consegue atingir é por conseguinte

$$J(u_{VM}(t)) = E[y^2(t+d)|O^t] = E[\beta^2]$$

ou seja

$$E[y^2(t+d)|O^t] \geq [1 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_{d-1}^2] \sigma_e^2$$

Controlo de variância mínima: Exemplo 1

Considere-se o processo modelado por

$$A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})u(t-1) + C^*(q^{-1})e(t)$$

em que

$$A^*(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \quad B^*(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

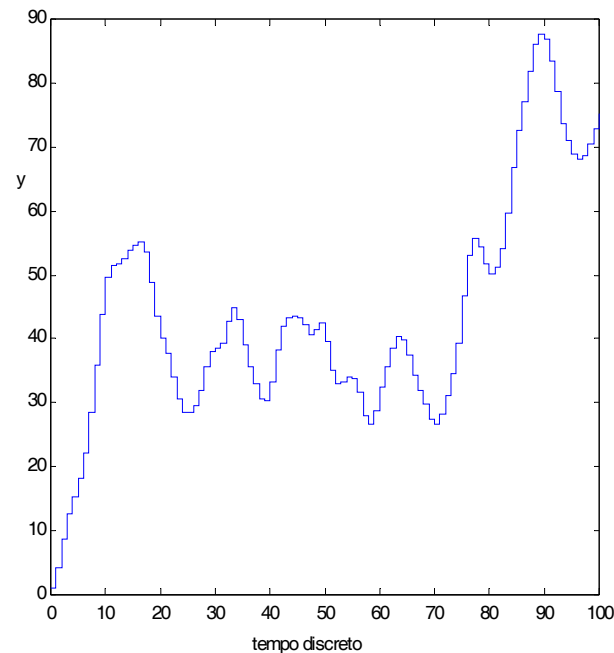
$$C^*(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

$$\sigma_e^2 = E[e_t^2] = 1$$

Repare-se que o atraso do sistema é de 1 amostra.

Pretende-se determinar o controlo de variância mínima.

Repare-se que quando o controlo se anula, a saída varia apreciavelmente devido à perturbação modelada como a passagem de ruído branco pelo sistema $C^*(q^{-1})/A^*(q^{-1})$. Uma amostra desta variação mostra-se na figura:



Determinação dos polinómios $F_1^*(q^{-1})$ e $G_1^*(q^{-1})$:

$$\frac{1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}}{1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}} \quad \left| \frac{1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}}{1} \right.$$

$$3.2q^{-1} + 0.2q^{-2}$$

Assim:

$$G_1^*(q^{-1}) = 3.2 + 0.2q^{-1} \qquad F_1^*(q^{-1}) = 1$$

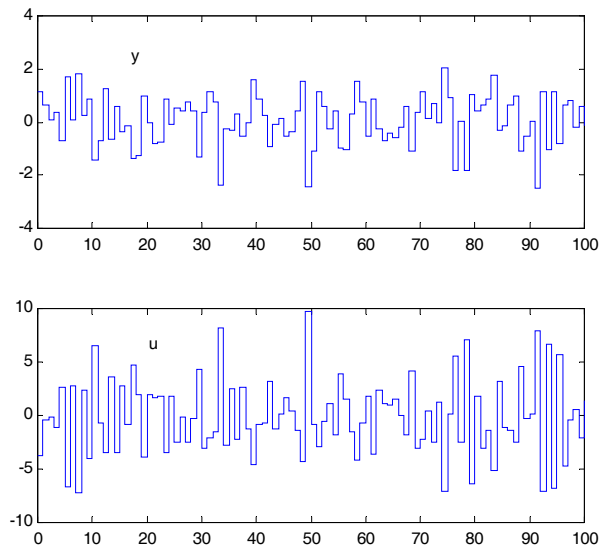
O controlador é

$$u(t) = -\frac{G_1^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})F_1^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{3.2 + 0.2q^{-1}}{1 + 0.5q^{-1}} y(t)$$

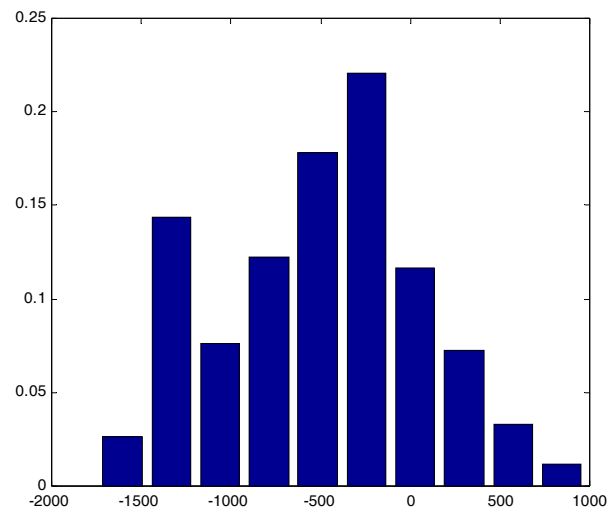
Em regime estocástico estacionário a saída tem uma variância

$$E[y^2(t)] = 1$$

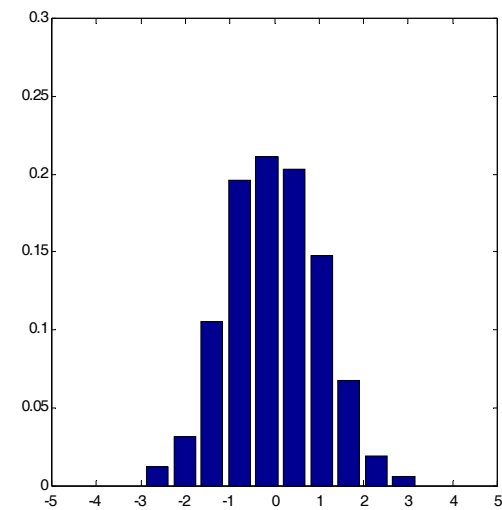
A figura mostra o gráfico de uma amostra da resposta do sistema com controlo de variância mínima:



Comparem-se os histogramas da saída em regime estacionário, com e sem controlo de variância mínima: O controlo permitiu reduzir a variabilidade.



Sem controlo



Com controlo

Controlo de variância mínima: Exemplo 2

Considere-se o processo modelado por

$$A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})u(t-2) + C^*(q^{-1})e(t)$$

em que (igual ao anterior)

$$A^*(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \quad B^*(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C^*(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

$$\sigma_e^2 = E[e_t^2] = 1$$

mas o **atraso** do sistema é agora de 2 amostras.

Pretende-se determinar o controlo de variância mínima.

Determinação dos polinómios $F_2^*(q^{-1})$ e $G_2^*(q^{-1})$:

$$\begin{array}{r} 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2} \\ \hline 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \\ \hline 3.2q^{-1} + 0.2q^{-2} \\ 3.2q^{-1} - 5.44q^{-2} + 2.24q^{-3} \\ \hline 5.64q^{-2} - 2.24q^{-3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \\ \hline 1 + 3.2q^{-1} \end{array} \right.$$

Assim:

$$G_2^*(q^{-1}) = 5.64 - 2.24q^{-1}$$

$$F_2^*(q^{-1}) = 1 + 3.2q^{-1}$$

O controlador é agora

$$u(t) = -\frac{G_2^*(q^{-1})}{B^*(q^{-1})F_2^*(q^{-1})} y(t) = -\frac{5.64 - 2.24q^{-1}}{1 + 3.7q^{-1} + 1.6q^{-2}} y(t)$$

Em regime estocástico estacionário a saída tem uma variância

$$E[y^2(t)] = 1 + 3.2^2 = 11.24$$

Repare-se que neste caso a variância da saída do sistema controlado é substancialmente maior do que a do ruído que perturba o sistema.

Pólos do sistema em cadeia fechada com controlo de VM

Comece-se por dar uma forma no operador avanço à expressão:

$$\frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = F_d^*(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G_d^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})}$$

ou seja

$$A^*(q^{-1})F_d^*(q^{-1}) = C^*(q^{-1}) - q^{-d}G_d^*(q^{-1})$$

"Multiplicando" ambos os membros por q^{n+d-1} obtém-se:

$$q^{d-1}C(q) = A(q)F_d(q) + G_d(q)$$

O sistema controlado é descrito pela equação (matricial):

$$\begin{bmatrix} A(q) & -B(q) \\ G_d(q) & F(q)_d B(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(q) \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

A equação característica, cujas raízes são os pólos deste sistema (com uma entrada e duas saídas) é:

$$\det \left(\begin{bmatrix} A(q) & -B(q) \\ G_d(q) & F(q)_d B(q) \end{bmatrix} \right) = 0$$

ou seja

$$B(q) [A(q) F_d(q) + G_d(q)] = 0$$

$$B(q)[A(q)F_d(q) + G_d(q)] = 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ q^{d-1}C(q) = A(q)F_d(q) + G_d(q) \end{array}$$

Assim, conclui-se que a equação característica do sistema em cadeia fechada com controlo de variância mínima é

$$q^{d-1}B(q)C(q) = 0$$

Repare-se que se o sistema em cadeia aberta for de fase não-mínima (tiver um ou mais zeros fora do círculo unitário) haverá modos instáveis devido ao cancelamento.

Exemplo 3 - Controlo de Variância Mínima

Considere-se o sistema em que:

$$A(q) = q^2 - 1.7q + 0.7 \quad B(q) = 0.9q + 1 \quad C(q) = q^2 - 0.7q$$

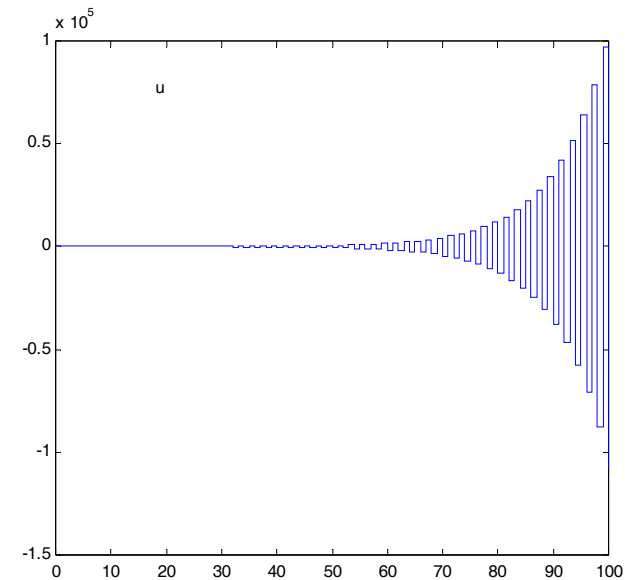
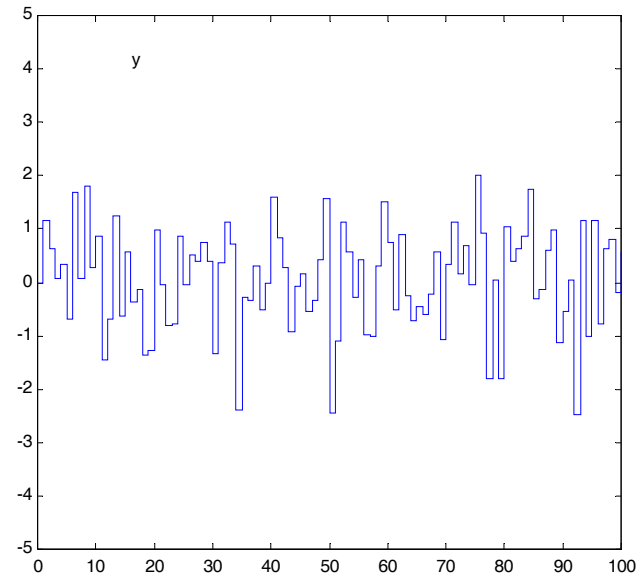
Há um zero em -1.11 o que origina um modo interno instável.

O controlador é

$$-\frac{G(q)}{B(q)F(q)} = -\frac{q - 0.7}{0.9q + 1}$$

O modo associado ao zero em -1.11 origina uma oscilação que é visível na entrada do sistema mas não na saída.

As respostas do exemplo 3.



A incapacidade de lidar com sistemas de fase não mínima é um defeito grave do controlo de variância mínima.

Controlo de variância mínima dessintonizado

Por forma a resolver o problema de o controlo de variância mínima pode fazer-se uma modificação do funcional de custo por forma a "pesar" a variável manipulada. Tem-se assim o funcional de custo de variância mínima dessintonizada definido por:

$$J(u(t)) = E\left[y^2(t+d) + \rho u^2(t) | O^t\right]$$

O parâmetro ρ é um número positivo que traduz a importância atribuída ao controlo no funcional de custo.

A minimização deste funcional de custo permite obter uma lei de controlo que estabiliza sistemas de fase não mínima;

No entanto, não garante a estabilização de sistemas de fase não mínima que sejam instáveis em cadeia aberta.

Para tal é necessário recorrer a técnicas de Controlo Ótimo ou a suas aproximações como o Controlo Preditivo.

Para um sistema ARX, viu-se que a dependência entre a saída e a entrada pode ser escrita como (por simplicidade toma-se o straso $d = 1$):

$$y(t + 1) = w_1 u(t) + \pi_1' s(t) + e(t + 1)$$

Inserindo este modelo no custo vem

$$J(u(t)) = E\left[y^2(t + 1) + \rho u^2(t) | O^t\right]$$

$$J(u(t)) = E\left[\left(w_1 u(t) + \pi_1' s(t) + e(t + 1)\right)^2 + \rho u^2(t) | O^t\right]$$

$$J(u(t)) = E \left[\left(w_1 u(t) + \pi_1' s(t) + e(t+1) \right)^2 + \rho u^2(t) \mid O^t \right]$$

$$J(u(t)) = \underbrace{\left(w_1 u(t) + \pi_1' s(t) \right)^2 + \rho u^2(t)}_{\alpha} + \underbrace{E \left[e^2(t+1) \right]}_{\text{Este termo não depende de } u(t)}$$

O valor de $u(t)$ que minimiza $J(u(t))$ satisfaz a equação algébrica

$$\frac{d\alpha}{du(t)} = 0$$

$$\frac{d}{du(t)} \left[\left(w_1 u(t) + \pi_1' s(t) \right)^2 + \rho u^2(t) \right] = 0$$

$$w_1 \left(w_1 u(t) + \pi_1' s(t) \right) + \rho u(t) = 0$$

A solução desta equação é:

$$u(t) = -\frac{w_1}{w_1^2 + \rho} \pi_1' s(t)$$

Repare-se que esta lei de controlo pode ser escrita na forma de uma retroacção do "estado" $s(t)$, em que o vector de ganhos é

$$F = -\frac{w_1}{w_1^2 + \rho} \pi_1$$

A lei de controlo de variância mínima dessintonizada ainda não é uma resposta satisfatória para o controlo (embora tenha sido utilizada com sucesso em aplicações industriais diversas).

Por exemplo, admitimos conhecido o atraso do sistema. Há sistemas (simultaneamente de fase não mínima e instáveis em cadeia aberta) que não podem ser estabilizados. Para além disso há outros aspectos matemáticos subtis que neste momento não podemos compreender.

Muitos destes problemas foram resolvidos com base em funcionais de custo semelhantes a este, mas em que se considera a saída durante um horizonte de mais de um ponto. Surgiu assim o controlo preditivo de que o GPC é um dos exemplos mais conhecidos.