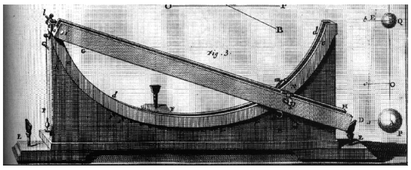


Controlo Óptimo e Adaptativo

Problemas

J. Miranda Lemos

IST - DEEC

2000

Eu tive a sorte de me cruzar com pessoas que me transmitiram referências que me ajudaram muito e ainda hoje me guiam. Quando eu ia fazer perguntas à minha professora de Física do Liceu, a Drª Alcina do Aido, ela começava sempre a conversa dizendo *"Vamos pensar"*, e isto instalou em mim a fé de que se usarmos a nossa cabeça com persistência, conseguimos atravessar fronteiras que pensamos intransponíveis. No Técnico, o Prof. João Figanier, em cuja disciplina eu conquistei um 11 que brilha no meu currículo, dizia muitas vezes *"É muito fácil resolver um problema de que se conhece a solução".*

Estes problemas são um convite ao pensamento e à luta. A recompensa é o resultado da famosa fórmula do Zé Fernandes, da *Cidade e As Serras*:

$$\begin{bmatrix} Suma \\ potencia \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Suma \\ Ciencia \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Suma \\ Felicidade \end{bmatrix}$$

E se alguns mais espertos do que o Zé Fernandes sabem que faltam eixos neste espaço de optimização (e restrições…), em Controlo Óptimo e Adaptativo é mesmo assim! Divirtam-se com os problemas.

João de Miranda Lemos

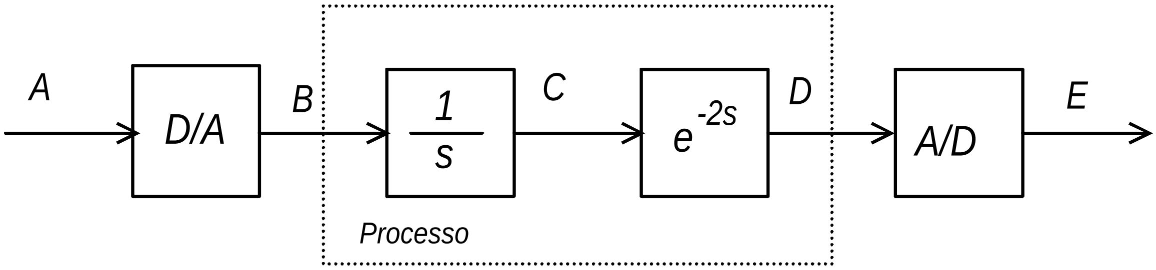
Dia de Stº António do Ano 2000

Parte I - Introdução ao Controlo por Computador e Adaptativo

Relativamente à Parte I da disciplina devem também ser efectuados os problemas dos capítulos correspondentes de Astrom e Wittenmark, *Computer Controlled Systems*.

2-Modelos em Controlo por Computador

P1 - Considere o sistema da figura seguinte.



O A/D e o D/A operam sincronamente, com um intervalo de amostragem de 1 segundo. Admita que o D/A se comporta como u m retentor de amostras de ordem zero e que o A/D se comporta como um amostrador ideal. Suponhya que as condições iniciais do processo são nulas. Suponha ainda que no ponto A é aplicado u m escalão d igital unitário. Nestas condições, responda às perguntas seguintes:

a) Represente graficamente os sinais nos pontos A, B, C, D, E.
b) Escreva expressões para o sinal nos pontos C e E.
c) Obtenha o modelo discreto equivalente entre os popntos A e E, na forma de uma função de transferência digital

P2 - Um sistema contínuo com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$

é amostrado com um intervalo de amostragem $h = 1$, com um retentor de amostras de ordem zero. Determine o seu equivalente discreto.

Note que a transformada Z do escalão unitário é

$$\frac{z}{z-1}$$

P3 - Considere o sistema contínuo cujo modelo de estado é

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Determine u m modelo discreto equivalente, na forma de uma função de transferência discreta, quando este sistema é amostrado com um retentor de amostras de ordem zero e um intervalo de amostragem de 2 segundos.

Nota:

$$Z\left(\frac{1}{2}(kh)^2\right) = \frac{h^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

3 - Identificação Recursiva. O Método dos Mínimos Quadrados

P1 - Dadas duas grandezas físicas X e Y, pretende-se estimar o parâmetro a no modelo linear que as relaciona, e que é da forma

$$Y = aX + \varepsilon$$

em que ε é uma variável que traduz a existência de erros experimentais. Em 5 experiências em que se mediu o valor de X e o correspondente valor de Y, obtiveram-se os seguintes resultados:

i	X	Y
1	**10**	**9**
2	**20**	**21**
3	**30**	**32**
4	**40**	**38**
5	**50**	**51**

Na tabela acima, *I* representa o número da experiência realizada.
Determine uma estimativa do parâmetro a recorrendo aos método dos mínimos quadrados, indicando:

a) A funcional de mínimos quadrados;
b) A equação satisfeita pela estimativa;
c) O valo da estimativa.

P2. Sabe-se que a grandeza *Y* tem uma variação polinomial no tempo, sendo modelada por um polinómio de segundo grau, da forma:

$$Y(t) = at^2 + \varepsilon(t)$$

Nesta equação, *t* é o tempo contado a partir do início da experiência, *a* é um parâmetro a estimar e ε(t) é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, o qual se assume pequeno. Por forma a estimar a constante *a*, efectua-se uma experiência ao longo da qual se regista o valor de *Y,* bem como os instantes de medida contados desde o início. Obtiveram-se os resultados que se mostram na tabela seguinte:

t (segundo)	*Y*
5	0.49
10	1.01
15	1.45
20	2.05

Problema P2

Recorrendo ao método do s mínimos quadrados e aos dados indicados na tabela, determine uma estimativa do parâmetro *a*. Indique sucessivamente:

a)A funcional de mínimos quadrados;

b)A equação satisfeita pela estimativa;

c)O valor da estimativa;

P3 - Deduza a s equações que permitem estimar recursivamente o vector de parâmetros θ dadas *N* observações de *y(t)* e de φ*(t-1)*, admitindo válido o modelo

$$y(t) = \varphi'(t-1)\theta + v(t)$$

em que *v(t)* é um resíduo pequeno (escalar para cada *t*). O estimador estimador não deve implicar a inversa de uma matriz, devendo minimizar o critério de mínimos quadrados com factor de esquecimento, dado por

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{t=1}^{N} \lambda^{N-t}(y(t) - \varphi'(t-1)\theta)^2$$

sendo λ um escalar positivo e menor do que 1.

Sugestão: $$\left[A+BCD\right]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[DA^{-1}B + C^{-1}\right]DA^{-1}$$

P4. Considere o processo estável descrito pela equação de diferenças

$$y(k) + ay(k-1) = u(k-1) + v(k)$$

em que *v(k)* é um resíduo não mensurável, modelado por

$$v(k) = e(k) + ce(k-1)$$

e as sequências *u(k), e(k)* são sequências brancas, independentes, de média nula e variância unitária. Supõe-se que apenas estão acessíveis para medida directa os sinais *y*, *u*, não sendo o sinal *e* acessível. Suponha válida a aproximação das médias estatísticas por médias na amostra. Exprima a estimativa de mínimos quadrados da constante *a* em função de *a* e de *c*.

Sugestão: Dado o modelo linear

$$y(t) = \varphi'(t-1)\theta_o + \varepsilon(t)$$

a estimativa de mínimos quadrados do vector θ_o é dada por

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^{N} \varphi(k-1)\varphi'(k-1)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} y(k)\varphi(k-1)$$

Para obter a variância da saída *y* em regime estacionário, comece por obter uma equação de diferenças para ela.

4 - Predição Linear e Controlo de variância Mínima

P1. Considere o sistema cujo modelo é:

$$y(t+2)+0.8y(t+1)+0.4y(t)=u(t+1)-0.5u(t)+e(t+2)+0.7e(t+1)+0.1e(t)$$

em que {e} é um sinal branco, gaussiano, de média nula e variância unitária.

a)Determine o controlador de variância mínima

b)Determine a potência da saída, em regime estacionário, quando é utilizado o controlador de variância mínima.

P2. Considere o sistema cujo modelo é:

$$y(t+2)=u(t)+e(t+2)$$

em que {*e*} é um sinal branco, gaussiano, de média nula e variância unitária.

a)Determine o controlador que minimiza

$$J=E\left[\left(y(t+2)-w(t+2)\right)^2\middle|I^t\right]$$

em que a referência *w* satisfaz

$$w(t)=0.8w(t-1)+0.2\eta(t)$$

sendo {η} um sinal branco, de variância unitária e independente de {*e*}.

Admita que *w(t)* é apenas conhecida no instante *t*, não sendop conhecida com antecipação.

b)Determine a potência do erro de seguimento, em regime estacionário, quando é utilizado o controlador de variância mínima que dimensionou.

Parte II - Introdução ao Controlo Óptimo

P1. Por aplicação do Princípio de Pontryagin, determine a função *u(t)* no intervalo de tempo [0,2] tal que o funcional

$$J(u) = x(2) - \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

seja máximo, sendo *x* o estado do seguinte sistema escalar com condição inicial nula:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + u(t)$$

Para avivar a memória e evitar o sempre desconfortável (e perigoso!) acesso às cábulas:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t), u(t)) + L_x(x(t), u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x)\big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P2. Considere o Princípio de Pontryagin para a resolução de problemas de Controlo Óptimo. Suponha que não há restrições em *u* e que *f* e *L* não dependem explicitamente do tempo *t*. Mostre que ao longo de uma trajectória óptima (do estado, coestado e controlo), a Hamiltoniana é constante no tempo.

P3. Por aplicação do Princípio de Pontryagin, determine a função *u(t)* tal que o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2(t) + u^2(t)dt$$

seja mínimo, sendo *x* o estado do seguinte sistema escalar instável

$$\frac{dx}{dt} = x + u(t)$$

Sugestão: Admita que existe uma constante *p* tal que

$$\lambda(t) = -px(t)$$

e determine essa constante.

Para avivar a memória e evitar o sempre desconfortável (e perigoso!) acesso às cábulas:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t))$$

$$J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-(\frac{d\lambda}{dt})' = \lambda'(t) f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t))$$

$$\lambda'(T) = \Psi_x(x)\Big|_{x=x(T)}$$

$$H(\lambda, x, u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

P4. Considere o sistema de controlo por realimentação das variáveis de estado, em que o processo a controlar é descrito por

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

A este sistema está associado o funcional de custo

$$J = \int_0^{\infty} \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

Esboce o lugar geométrico das raízes do sistema em cadeia fechada quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito. Não necessita determinar exactamente os pontos de saída ou entrada no eixo real.

P5. Considere o sistema de 1ª ordem descrito pela equação diferencial:

$$\dot{y} = 2y + u$$

Recorrendo ao "*root-square locus*" determine o ganho k do controlador proporcional, dado por

$$u(t) = -ky(t)$$

em função do parâmetro ρ por forma a optimizar o funcional quadrático:

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

Esboce o lugar geométrico das raízes do sistema em cadeia fechada óptimo quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito.

P6. Considere o sistema de segunda ordem de fase não-mínima descrito pela função de transferência

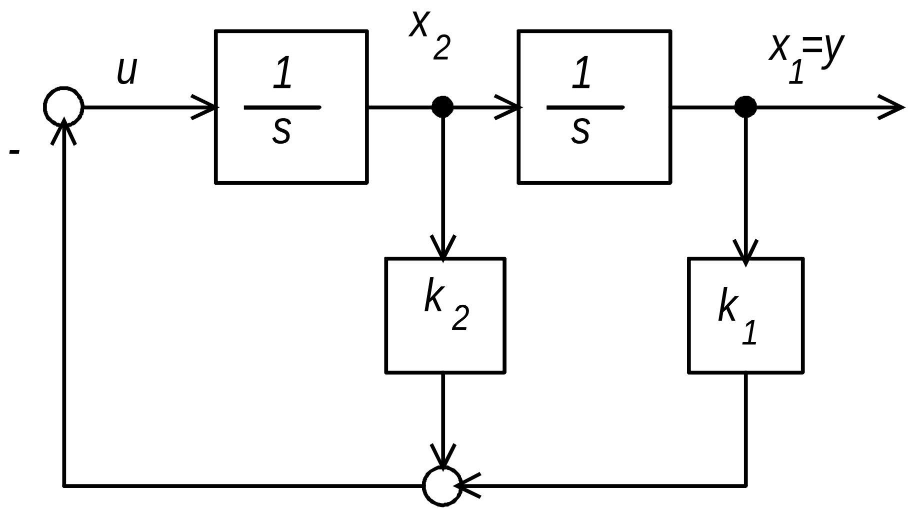
$$G(s) = \frac{s-1}{(s+2)^2 + 1}$$

Determine o lugar geométrico das raízes do sistema em cadeia fechada que optimiza

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito.

P7. Considere o sistema descrito pelo diagrama de blocos seguinte:



Através da solução da equação de Riccati algébrica determine os ganhos k_1 e k_2 de r etroacção do es tado (suposto ac essível para m edida di recta) q ue minimizam

$$J = \int_0^\infty \left[y^2(t) + \rho u^2(t) \right] dt$$

para $\rho = 1$. Trace o lugar geométrico das raízes que minimizam este funcional de custo quando o parâmetro ρ varia de 0 a mais infinito.

Problemas sobre controlo adaptativo e Mínimos Quadrados

P1 (Princípio da Ortogonalidade). Dadas observações das variáveis aleatórias y e φ considere o problema de estimar o parâmetro θ (escalar) no modelo

$$y = \theta\varphi + e$$

através do estimador de mínimos quadrados definido como o valor de θ que minimiza o funcional

$$J(\theta) = E\left[(y - \theta\varphi)^2\right]$$

a) Mostre que o estimador de mínimos quadrados $\hat{\theta}$ verifica a chamada *equação normal*:

$$E\left[(y - \hat{\theta}\varphi)\varphi\right] = 0$$

Repare que, se interpretarmos a média do produto de duas variáveis como o produto interno entre essas variáveis (pensadas como vectores), esta equação diz que, com o estimador linear-quadrático óptimo, o erro (no modelo) é ortogonal aos dados (daí o nome de "equação normal").

b) Admitindo que $E\left[\varphi^2 > 0\right]$, obtenha uma expressão para o estimador.

-- ⌘ --

P2 (Equilíbrio dos ganhos no controlador self-tuning). Considere um processo de 1ª ordem descrito pelo modelo ARMAX:

$$y(t) + ay(t-1) = u(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

Pretende-se controlar este processo com um controlador adaptativo, constituído por um estimador de mínimos quadrados e por um critério de variância mínima. Embora os dados sejam produzidos de acordo com este modelo (que se supõe desconhecido), supõe-se que eles satisfazem o modelo

$$y(t) + \theta y(t-1) = u(t-1) + v(t)$$

em que v é uma sequência de "ruído". O parâmetro θ nesta equação é estimado por mínimos quadrados. Usa-se uma lei de controlo dada por

$$u(t) = \hat{\theta}\, y(t)$$

Admitindo que v é branco (o que não é verdade!) esta lei corresponde à lei de controlo de variância mínima se $\hat{\theta} = \theta$.

a) Usando o Princípio de Ortogonalidade que deduziu no problema P1 e a lei de controlo acima, mostre que os dados do sistema controlado verificam:

$$E[y(t)y(t-1)] = 0$$

ou seja, que a correlação de atraso 1 é zero com o controlador considerado.

b) Considere o sistema original (de acordo com o qual os dados são gerados) e mostre que se usarmos uma lei de controlo

$$u(t) = (a - c + \delta)y(t)$$

se tem $E[y(t)y(t-1)] = 0$ sse $\delta = 0$. Ou seja, mostre que a autocorrelação de atraso 1 da saída é nula apenas com o controlo de variância mínima.

A conjunção das alíneas a) e b) mostra que o único possível ponto de convergência do ganho do regulador *self-tuning* é o ganho do controlo de variância mínima. Repare que não provámos que, de facto, o ganho converge.

-- ⌘ --